АКАДЕМИЈА ТЕХНИЧКИХ СТРУКОВНИХ СТУДИЈА БЕОГРАД

Катарине Амброзић бр. 3, Београд, +381 11 64 10 990, info@atssb.edu.rs

ПРИРУЧНИК ЗА ПРИПРЕМУ ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2022. година

Комисија за упис:
vradivojevic@atssb.edu.rs
ndjordjevic@atssb.edu.rs

1. Степеновање и кореновање

1.1. Степеновање природним бројем

Ако је a било који реалан број тада је

$$a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a,$$

и уопште, за произвољан природан број n имамо

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-пута}}.$$

За произвољне реалне бројеве a, b и произвољне природне бројеве m, n важе следећи закони:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$

(2) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m};$

(3) $(ab)^n = a^n \cdot b^m;$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \ b \neq 0.$

1.2. Степеновање целим бројем

Ако је $a \neq 0$ и n произвољан природан број, тада уводимо дефиницију

$$a^0 = 1, \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Претходном дефиницијом је дефинисано степеновање са негативним бројем основа различитих од нуле. Када је основа нула важи

$$0^n = \begin{cases} 0, \ n \geq 1 \\ \text{није дефинисно}, \ n \leq 0 \end{cases}.$$

За степеновање целим бројем важи и

(5) $\frac{a^n}{b^m} = a^{n-m}, \quad b \neq 0.$

1.3. Дефиниција корена

За сваки позитиван реалан број a и сваки природан број n постоји тачно један позитиван број b такав да је $b^n = a.$

Тај јединствен и позитиван број b означавамо са $\sqrt[n]{a}$ и називамо n-ти корен позитивног броја a.

Специјално, у случају $n = 1,$ уместо $\sqrt[1]{a}$ пишемо једноставно само $a,$ а у случају $n = 2$, уместо $\sqrt[2]{a}$, пишемо краће $\sqrt{a}.$

Дакле, када је подкорена величина позитивна, вредност корена је јединствен и позитиван број. У случају када је подкорена величина негативна разликујемо два случаја:

а) ако је n паран број, онда n-ти корен из негативног броја a није дефинисан;

б) ако је n непаран број, онда n-ти корен из негативног броја a дефинишемо као

$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}.$

Пример. $\sqrt[2]{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$ нису дефинисани, односно не постоје у оквиру скупа реалних бројева, а $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{|-8|} = -\sqrt[3]{8} = -2.$

Ако су a, b позитивни реални бројеви, а m, n природни бројеви важи:

(5) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$

По дефиницији вредност корена је јединствен позитиван број. Заборављањем ове чињенице често се долази до многих погрешних резултата. Тако је $\sqrt{4} = 2,$ без обзира што је и $(-2)^2 = 4.$ То не треба мешати са чињеницом да једначина $x^2 = 4$ има два реална решења. У том смислу треба строго водити рачуна да је

$\sqrt{a^2} = |a|.$

1.4. Степеновање рационалним бројем

Сада можемо дефинисати израз a^x где је a произвољан позитиван број, а x било који рационалан број. Сваки рационалан број се може записати као количник два природна броја. Дакле, $x = \frac{m}{n}.$ Тада је, по дефиницији

$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$

Ако су a, b произвољни реални бројеви, m, p цели бројеви и n, q природни бројеви важи:

(6) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$

(7) $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$

(8) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}};$

(9) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}};$

Код овакве дефиниције јавља се проблем што записивање рационалних бројева није јединствено одређено. Наиме, $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \ldots$ У том случају понекад се може појавити следећи проблем. Ако бисмо $\sqrt[3]{-8}$ записали као $(-8)^{\frac{1}{3}}$, тада, због тога што је $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, имали бисмо да је $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}}.$ Међутим, $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2,$ док је $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2,$ а такође можемо писати и $(-8)^{\frac{2}{6}} = \left(\sqrt[6]{-8}\right)^2$, што није дефинисано. Овако различити резултати могу бити узрок многим грешкама и треба о томе водити рачуна.

Задаци за вежбу

1.Ако је $a+a^{-1}=1$, израчунати

а) a^2+a^{-2}; б) a^3+a^{-3}; ц) a^5+a^{-5}.

2.Ако је $xy=zu$, упростити израз

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}.$$

3.Ако је $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ наћи вредност израза

$$\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}.$$

4. Ако је $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}-\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$, израчунати вредност израза

$$x^3+3x+2\sqrt{3}.$$

5. Ако је $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$, израчунати $x^4+y^4+z^4$.

6. Израчунати $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$, за $a=\sqrt{2}$ и $b=\sqrt{3}$.

7. Израчунати $\dfrac{x-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

8. Рационалисати следеће imениоце:

а) $\dfrac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-y}$; ц) $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}$; д) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{8}}$; е) $\dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$;

ф) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$; г) $\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}$; х) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

9. Доказати идентитете:

а) $1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{a+1}{ab}+\dfrac{(a+1)(b+1)}{abc}+\dfrac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=\dfrac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$.

б) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}+\dfrac{16}{1+x^{16}}=\dfrac{32}{1-x^{32}}$.

ц) $\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)^2=\dfrac{(x+1)^2}{x}$, $x>0$.

д) $\dfrac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{-\frac{1}{2}}}=2\dfrac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}$, $x>0$, $x\neq 1$.

е) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}-2\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}=0$, $x\neq 0$, $x\neq 1$.

ф) $\dfrac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}+x}:\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}-1}=x-1$, $x\geq 0$, $x\neq 1$.

10. Упростити изразе

а) $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}-\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$.

б) $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+4}{\sqrt{bc}+2}-2.$

ц) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}};$

д) $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0.5}};$

е) $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1;$

ф) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}{\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}.$

11. Израчунати вредност израза за дате вредности аргумената.

а) $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, за $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right);$

б) $\dfrac{2b\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$, за $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right);$

ц) $\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$, за $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4};$

д) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$, за $a=5;$

е) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{4}}}{x-1}+\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-1}{x^{\frac{3}{4}}+1}$, за $x=16;$

ф) $\dfrac{x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}+3}{x-\sqrt{3}}$, за $x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}.$

Упутства и решења

1.Искористити формуле за степен бинома

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y),$

$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5=x^5+y^5+5xy(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y).$

Заменом $x=a,\ \ y=a^{-1}$ и знајући да је $a\cdot a^{-1}=a^0=1$, као и да је $a+a^{-1}=1$ лако налазимо да је

а) $(a+a^{-1})^2=1^2$, односно $a^2+2aa^{-1}+a^{-2}=1.\ \ a^2+a^{-2}=-1;$

б) $(a+a^{-1})^3=1^3$, односно $a^3+3a\cdot a^{-1}(a+a^{-1})+a^{-3}=1.\ \ \ a^3+a^{-3}=1-3=-2;$

ц) $(a+a^{-1})^5=1^5$, односно $a^5+a^{-5}+5a\cdot a^{-1}(a^3+a^{-3})+10a^2\cdot a^{-2}(a+a^{-1})=1.$

$a^5+a^{-5}=1.$

2. Из $xy = zu$ следи да је $\frac{u}{x} = \frac{y}{z}$, односно $\frac{u}{x} = \frac{u+y}{x+z}$. Одавде следује да је

$$x + y + z + u = (x+z)\left(1 + \frac{u+y}{x+z}\right) = (x+z)\left(1 + \frac{u}{x}\right) = (x+z)\frac{x+u}{x}.$$

Слично се добија да из $xy = zu$ следи да је $\frac{u}{y} = \frac{x}{z}$, односно $\frac{u}{y} = \frac{x+u}{y+z}$. одатле следи

$$x + y + z + u = (y+z)\left(1 + \frac{x+u}{y+z}\right) = (y+z)\left(1 + \frac{u}{y}\right) = (y+z)\frac{y+u}{y}.$$

Множењем ове две једнакости лако се налази да је резултат xy или zu.

3. Треба уочити да је $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, а такође и

$\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left|\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Заменом у формулу лако се добија резултат 1.

4. Кубирањем полазне једнакости (формула као за 1. задатак!) добијамо

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^3 = 2 - \sqrt{3} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\left(\underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}_{x}\right) - \left(2+\sqrt{3}\right) =$$

$$-3\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} \cdot x - 2\sqrt{3} = -3x - 2\sqrt{3}.$$

Пребацивањем на леву страну добија се $x^3 + 3x - 2\sqrt{3} = 0$.

5. Искористимо формулу за квадрат тринома дату са

(тк) $\quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Заменом $a = x, b = y, c = z,$ у формулу (тк) добијамо

$(x+y+z)^2 = 0^2$, односно $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0,$ тј.

$x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + xz + yz).$

Одавде налазимо да је $xy + xz + yz = -\frac{1}{2}$. Поновним квадрирањем ове једнакости добијамо $(xy + xz + yz)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$, тј. $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2xyz\left(\underbrace{x+y+z}_{0}\right) = \frac{1}{4}$, тј.

$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = \frac{1}{4}.$

Заменом $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ у формулу (тк) добијамо

$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 1^2$, односно $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 = 1.$

Сада налазимо да је резултат $\frac{1}{2}$.

6. Овде треба бити пажљив, јер ће се лако добити погрешан резултат. На левој страни су корени и резултат мора бити позитиван реалан број! Лако се примети да је $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} = \left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right|$., $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|$..

Дакле, $\left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right| \cdot \left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right| = |a-b|$. Заменом датих вредности добија се

$\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$

7. За $x \geq 0, y \geq 0$ имамо да је $x - y = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ и $-x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = -\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})$. Сада се налази да је

$$\frac{x - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{x - y - x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy}.$$

8. Генерално, рационализација разломака своди се углавном на допуну до разлике квадрата, разлике кубова, збира кубова или пуних корена. Поступак се понавља онолико пута колико је потребно да се елиминишу сви корени.

а) Свеједно је којим редоследом треба елиминисати корене, пошто се морају сви елиминисати. Зато, прво проширимо са $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}$ добијамо

$$\frac{1 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{6} - 1}$$

Сада треба још проширити са $2\sqrt{6} + 1$, коначно добијамо

$$\frac{7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2\sqrt{6} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{6} + 1} = \frac{23\sqrt{3} - 23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

б) Треба искористити формулу за разлику кубова која гласи

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ односно } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Ставимо у прву формулу $a = \sqrt[3]{x}, b = y$ налазимо да је множилац $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}y + y^2$.

Сада је $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x} - y} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}y + y^2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}y + y^2} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}y + y^2}{x - y^3}$.

ц) Допуна до разлике квадрата,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{3}}{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - 3} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 2} \cdot \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} + 2} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{3}\right)(\sqrt{2} + 2)$$

д) Два пута разлика квадрата. Прво имамо

$$\frac{3}{\sqrt[4]{11} - \sqrt[4]{8}} = \frac{3}{\sqrt[4]{11} - \sqrt[4]{8}} \cdot \frac{\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8}} = \frac{3(\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})}{\sqrt{11} - \sqrt{8}}.$$

Поновном допуном до разлике квадрата добијамо

$$\frac{3(\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})}{\sqrt{11} - \sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{11} + \sqrt{8}}{\sqrt{11} + \sqrt{8}} = \frac{3(\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})}{3} = (\sqrt[4]{11} + \sqrt[4]{8})(\sqrt{11} + \sqrt{8})$$

е) Слично, као под а) прво проширимо са $\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}$, имамо

$$\frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}}{\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{30}(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})}{(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{2\sqrt{30}(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})}{2\sqrt{30} - 4} = \frac{\sqrt{30}(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})}{\sqrt{30} - 2}.$$

Сада још једно множење са $\sqrt{30} + 2$, коначно добијамо

$$\frac{\sqrt{30}(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})}{\sqrt{30} - 2} \cdot \frac{\sqrt{30} + 2}{\sqrt{30} + 2} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})(30 + 2\sqrt{30})}{26} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})(15 + \sqrt{30})}{13}.$$

ф) Именилац посматрати као разлику квадрата множењем са $(\sqrt{6} - \sqrt{3}) - (\sqrt{2} - 1)$

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{6 - 4\sqrt{2}}.$$

Поново допуна до разлике квадрата са множењем $6 + 4\sqrt{2}$, добијамо

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \frac{6 + 4\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2}.$$

г) Овде степен није битан. Треба рационализовати само израз у загради.

$$\frac{1}{\left(3-\sqrt{2}\right)^3}=\left(\frac{1}{\left(3-\sqrt{3}\right)}\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right)^3=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^3.$$

х) Допуна до разлике квадрата правилним груписањем

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2-\left(2+\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{5}+2\sqrt{2}-2-\sqrt{10}.$$

9. а) Треба сабирање изводити поступно почевши од прва два сабирка. Имамо

$$1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a};$$

$$\frac{a+1}{a}+\frac{a+1}{ab}=\frac{b(a+1)+(a+1)}{ab}=\frac{(a+1)(b+1)}{ab},\ \text{итд.}$$

б) И у овом случају треба применити поступак као под а)

ц) Треба степене записати као $x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$, тако имамо

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^2=\frac{1}{x}+2\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}+x=\frac{1}{x}+2+x=\frac{1+2x+x^2}{x}=\frac{(x+1)^2}{x},\ x>0.$$

д) Као под а) и још $x^{-1}=\frac{1}{x}$. Сада се посебно трансформише лева и десна страна које се своде на исти израз. Имамо

$$\frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{2(x+1)}{x-1},\ x>0,\ x\neq 1.$$

$$2\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}=2\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=2\frac{x+1}{x-1}=\frac{2(x+1)}{x-1},\ x>0,\ x\neq 1.$$

е) Искористимо да је $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$, $x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}$, $x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$, $x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Ако сваки сабирак прво запишимо помоћу корена, имамо

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}}=\frac{x}{x-1};$$

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x}(x-1)}=\frac{x}{x-1};$$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{x}{x-1}.$$

Сада је лако проверити да је резултат нула.

ф) Преласком на корене имамо

$$\frac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}+x}:\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}-1}=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{\sqrt{x}^3-1}=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x}\cdot\left(\sqrt{x}^3-1\right)=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{1+\sqrt{x}+x}=x-1,\ x\geq 0,\ x\neq 1.$$

10. Генерално упуство за све задатке у којима треба упростити израз је да се то ради поступком који би се могао описати као израчунавање "**део по део**". То значи да треба уочавати мање целине које прво треба посебно срачунати, па враћањем у израз тај поступак треба понављати све док се не добије крајњи резултат.

а) Други израз у првој загради треба другачије записати са

$$\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}=\frac{1-a}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-(1-a)}=\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}};$$ (скраћен разломак са $\sqrt{1-a}$)

Сада упрошћавамо само прву заграду. Имамо

$$\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}-\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}=\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}=1;$$

Остаје друга заграда која даје

$$\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}.$$

б) Прво упрошћавамо израз у загради. Приметимо да постоји заједнички чинилац који се може извући испред заграде. Имамо

$$\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2=\left(\sqrt[4]{bc}\right)^2\left(\frac{\sqrt[4]{c^2}+\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+1\right)^2=\sqrt{bc}\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+1\right)^2=\sqrt{bc}(1+1)^2=4\sqrt{bc};$$

Сада упрошћавамо остатак

$$\frac{4\sqrt{bc}+bc+4}{\sqrt{bc}+2}-2=\frac{\left(\sqrt{bc}+2\right)^2}{\sqrt{bc}+2}-2=\sqrt{bc}+2-2=\sqrt{bc}.$$

ц) У дељенику је једино могуће извући заједнички множилац у његовом имениоцу. Имамо $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$; У делиоцу се примећује да је то такође могуће урадити, па потом у имениоцу имамо разлику кубова. Дакле

$$\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}^3-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.$$

Сада срeђујемо цео израз, имамо

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{1}=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1.$$

д) Рационалне степене напишемо као корене, па је именилац делиоца разлика кубова. Дељење је у овом случају само скраћивање. Имамо

$$\frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}^3-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)},$$

Сада вршимо дељење

$$\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1}=\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+1}=\left(\sqrt{x}-1\right)^2,$$

користили смо разлику квадрата, односно да је $x-1=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$

Коначно је на реду цео израз. Имамо

$$\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1}+\frac{2}{x^{-0.5}}=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\frac{2}{x^{-0.5}}=x-2\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}=x+1.$$

е) Поента у сређивању овог израза је у извлачењу заједничког множиоца испред заграде. Треба прво уочити да је

$$x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right);$$

$$x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right);$$

$$x-1=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right).$$

Заменом у први део полазне формуле и после скраћивања добијамо

$$\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}}.$$

Сада је лако упростити цео израз. Имамо

$$\frac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot x^{\frac{1}{4}}+1=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt[4]{x}}\cdot\sqrt[4]{x}+1=\sqrt{x}-1+1=\sqrt{x}.$$

ф) Посебно упрошћавамо бројилац и именилац. Имамо

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{\sqrt{a+x}^2-\sqrt{a-x}^2}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a+x}}\cdot\frac{a+x-(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{\sqrt{a-x}^2+\sqrt{a+x}^2}{\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{a+x}}=\frac{a-x+a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Коначно цео разломак постаје

$$\frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}=\frac{\frac{2x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\frac{2a}{\sqrt{a^2-x^2}}}=\frac{x}{a}.$$

11. Генерално упуство за овакве задатке је да се ретко вредности учествујућих промењљивих замењује у израз, већ да се израз прво треба упростити техником "део по део".

а) Прво, срачунајмо вредност од x, имамо

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Сада је

$$x^2-1=\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2-1=\frac{(a+b)^2}{4ab}-1=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4ab}=\frac{(a-b)^2}{4ab}=\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^2.$$

Зато је

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}=\begin{cases}\frac{a-b}{2\sqrt{ab}},\ a\geq b\\ \frac{b-a}{2\sqrt{ab}},\ a<b\end{cases}.$$

Сада имамо две гране и два решења. Ако је $a\geq b$ имамо да је

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}=\frac{2b}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

па је вредност целог израза

$$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2b\cdot\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}}{\sqrt{\frac{b}{a}}}=a-b.$$

Ако је $a<b$ онда је

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}=\frac{2a}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{a}{b}},$$

па је вредност целог израза

$$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2b\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}}{\sqrt{\frac{a}{b}}}=\frac{b}{a}(b-a).$$

б) Потпуно се аналогно решава као и под а). Крајње решење је

$$\frac{2b\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}=a+b.$$

ц) Треба уочити следеће једнакости

$$\sqrt{1+2x}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2};$$

$\sqrt{1-2x}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.(Вредност корена мора бити позитивна)

Даље налазимо да је

$$1+\sqrt{1+2x}=1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{2};$$

$$1-\sqrt{1-2x}=1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

Први и други сабирак постају

$$\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}=\frac{1+2\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6};$$

$$\frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}=\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

Коначно је

$$\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}=1.$$

д) Прво израз записујемо са коренима. Имамо

$$\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}}=\frac{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)};\qquad \frac{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}=\frac{\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{a-1}=\frac{\frac{a-1}{\sqrt{a}}}{a-1}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Сада је цео израз једнак

$$\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}-1-1-\sqrt{a}}{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}\right)}=\frac{-2}{\sqrt{a}+a}.$$

Заменом $a=5$ добијамо

$$\frac{-2}{\sqrt{5}+5}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{-2\left(5-\sqrt{5}\right)}{20}=\frac{\sqrt{5}-5}{10}.$$

е) У овом изразу се мора директно заменити вредност. То је овде препоручљиво јер ако би се овај израз покушао да некако другачије упрости врло брзо би се суочили са чињеницом да то није могуће применом неког једноставног поступка. Ово је пример који одступа од правила. Ипак, цео израз срачунавамо и у овом случају техником „део по део“. Имамо:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt[4]{x}}=\frac{\sqrt{16}+1}{16+\sqrt[4]{16}}=\frac{5}{18};$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{4}}}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}{x-1}=\frac{\sqrt{16}+\sqrt[4]{16}^{\,3}}{15}=\frac{12}{15};$$

$$\frac{x^{\frac{3}{4}}-1}{x^{\frac{3}{4}}+1}=\frac{\sqrt[4]{x}^{\,3}-1}{\sqrt[4]{x}^{\,3}+1}=\frac{\sqrt[4]{16}^{\,3}-1}{\sqrt[4]{16}+1}=\frac{8-1}{8+1}=\frac{7}{9}.$$

Налазимо вредност целог израза

$$\frac{5}{18}\cdot\frac{12}{15}+\frac{7}{9}=\frac{2}{9}+\frac{7}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

ф) Као и у претходном случају директно замењујемо вредност у израз. Прво налазимо

$$x^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)^2=3-2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4};$$

$$x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}+3=3-2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\right)-\sqrt[3]{4}+3=6-2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}-6+2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}=0.$$

Дакле, вредност израза је нула.

2. Алгебарске једначине и неједначине

2.1. Једначина првог степена (линеарна једначина)

Једначина по непознатој x

(1) $a \cdot x = b,$

где су a, b реални бројеви и $a \neq 0$ има јединствено решење $x = \frac{b}{a}$. За $a = 0,$ разликујемо два случаја: ¡) за $b = 0$ једначина је неодређена – решење је сваки реалан број; ¡¡) за $b \neq 0$ једначина је немогућа – нема решења.

Линеарне једначине се решавају еквивалентним трансформацијама. Што значи да је сваку линеарну једначину могуће трансформисати на облик (1) и тиме добити одговор о решењима полазне једначине.

2.2. Систем две линеарне једначине са две непознате

Систем две линеарне једначине са две непознате се обично записује са

(2) $$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}$$

Ако је $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ систем има јединствено решење дато са

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Ако је $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ разликујемо два случаја:

¡) Систем (2) је неодређен, има бесконачно много решења, ако је истовремено

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0 \text{ и } c_2 a_1 - c_1 a_2 = 0.$$

¡¡) Систем (2) је немогућ ако је бар један од следећих израза различит од нуле

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 \neq 0 \text{ или } c_2 a_1 - c_1 a_2 \neq 0.$$

Осим већ готових формула систем једначина (линеаран или не) може се решавати методом замене. Што значи да се, ако је то могуће, једна од једначина реши по некој од непознатих, па се то као замена уведе у другој једначини. Тако друга једначина постане једначина са једном непознатом која се потом мора решити. Вредност друге непознате добија се из смене.

2.3. Линеарне неједначине

Неједначина облика

(3) $ax + b > 0, \ a \neq 0,$

назива се линеарна неједначина. Ову неједначину за $a > 0$ задовољавају сви реални бројеви за које важи $x > -\frac{b}{a}$, односно сви бројеви из интервала $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$.

За $a < 0$ решења су сви реални бројеви за које важи $x < -\frac{b}{a}$, односно из интервала $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.

И поред одређене сличности у решавању линеарних неједначина са решавањем линеарних једначина има много више међусобних разлика. Због тога не треба повезивати и истрајавати на сличностима већ је много корисније уочавати њихове различитости.

2.4. Систем линеарних неједначина

Систем линеарних неједначина чине две или више линеарних неједначина. Систем линеарних неједначина се решава тако што се свака линеарна неједначина реши независно као посебна неједначина. Када одредимо скупове решења сваке од учествујућих линеарних неједначина укупно решење се добија као пресек свих добијених решења.

Веома важна класа неједначина чије се решавање своди на системе линеарних неједначина претстављају неједначине знака. Такве неједначине су облика

$$(ax+b)(cx+d)>0,\quad \frac{px+q}{rx+s}(mx+n)<0,\quad \frac{ax+b}{cx+d}\cdot\frac{px+q}{rx+d}>0,\quad \text{итд.}$$

Када се решавају помоћу система неједначина као решење се по правилу добија унија више система линеарних једначина. У том случају када решимо сваки систем посебно укупно решење је унија свих добијених решења на које је систем разложен.

2.5. Квадратна једначина

Једначина облика

(4) $\quad ax^2+bx+c=0,$

где су a,b,c реални бројеви назива се квадратна једначина. Квадратна једначина може да има највише два реална решења. То је одређено дискриминантом која се рачуна по формули $\delta=b^2-4ac.$ Разликујемо следећа три случаја:

¡) Ако је $\delta<0$ квадратна једначина (4) нема реалних решења;

¡¡) Ако је $\delta=0$ квадратна једначина (4) има двоструко решење $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}.$

¡¡¡) Ако је $\delta>0$ квадратна једначина (4) има два реална решења дата формулом

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Решења квадратне једначине повезана су Виетовим правилима. Односно ако су x_1,x_2 решења квадратне једначине (4) тада важи

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

2.6. Квадратне неједначине

Неједначина облика

(5) $\quad ax^2+bx+c>0,$

назива се квадратна неједначина. Када једначина (5) има реална решења означимо их са: x_1,x_2. Тада је решење неједначине (5) дато са једним од следећа 3 случаја:

¡) Ако је $\delta > 0$ и $a > 0$ решење је сваки број из интервала $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.
¡¡) Ако је $\delta > 0$ и $a < 0$ решење је сваки број из интервала $x \in (x_1, x_2)$.
¡¡¡) Ако је $\delta < 0$ и $a < 0$ неједначина (5) нема решење.

Ови случајеви као и сви остали лако се добијају скицирањем графика функције $f(x) = ax^2 + bx + c.$ Скицирање графика се постиже на основу коефицијента a и решења x_1, x_2. Ако је $a > 0$ график (парабола) је окренута тако да је теме минимум функције и у супротном је максимум. Када се искористе и нуле није тешко скицирати облик, а потом и дати одговор о решењима неједначине (5).

2.7. Ирационалне једначине

Ирационалне једначине су облика $\sqrt{A} = B$ или $\sqrt[3]{A} = B.$ Практично се решавају са једним од следећа два начина.
¡) "Неинтелигентном методом"

Квадрирањем или кубирањем једначине све док се не ослободимо свих корена па потом решавањем добијене једначине и <u>обавезном **провером**</u> добијених кандидата као могућих решења полазне једначине.
¡¡) "Интелигентном методом"

Када су у једначини кубни корени поступак је идентичан претходној методи.

За парне корене користи се следећа еквивалентност

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}.$$

Тако се после сваког квадрирања сужава област у којој решење може да се нађе. Оваквим поступком је осигурано да је кандидат за решење уједно и решење.

Задаци за вежбу

1. Решити једначине:

а) $\dfrac{7}{x^2-1} + \dfrac{8}{x^2-2x+1} = \dfrac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x+3} + \dfrac{4}{x^2+2x-3} = 0;$

ц) $6 - \left(\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{1+3x}{4}\right) = 5 - \left(\dfrac{7x-1}{8} - \dfrac{5-2x}{3}\right);$ д) $\dfrac{3x+5}{2} - \left(4 + \dfrac{x-5}{6}\right) = \dfrac{5+5x}{3} - \left(\dfrac{3x-3}{2} - 2\right);$

е) $|x+1| + |x-2| = |x+2|;$ ф) $2 + |x-6| = |x-4|:$

г) $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right| = 3;$ х) $\dfrac{|x-1|+2}{1-|2-x|} = 4;$

и) $\dfrac{3|x|-2}{|x|-1} = 3;$ ј) $\left|\dfrac{3|x|-6}{x+3}\right| = 2;$

к) $\dfrac{a}{1-bx} = \dfrac{b}{1-ax}$; л) $\dfrac{1}{ax-a^2} + \dfrac{1}{ax-ab} + \dfrac{1}{bx-ab} + \dfrac{1}{bx-b^2} = 0;$

м) $\dfrac{x+6}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+6} = \dfrac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$; н) $\dfrac{2x}{a^3-8} - \dfrac{a}{a^2+4a+4} = \dfrac{x-1}{a-2}.$

2. Решити системе једначина:

а) $\begin{aligned}\frac{xy+2x+5}{10}+\frac{3xy-8x+1}{4}&=9\\ \frac{xy+2x+5}{10}-\frac{3xy-8x+1}{2}&=0.\end{aligned}$; б) $\begin{aligned}\frac{2(4x-5y)}{13}-\frac{3x+7y}{8}&=1\\ \frac{4x-5y}{13}+\frac{3x+7y}{8}&=8.\end{aligned}$

ц) $\begin{aligned}\frac{x+3}{y+2}&=\frac{x+5}{y+3}\\ \frac{y+1}{y}-\frac{x+5}{x}&=\frac{8}{xy}.\end{aligned}$; д) $\begin{aligned}\frac{x+2y}{xy}&=\frac{5}{6}\\ \frac{3x+2y}{xy}&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$

е) $\begin{aligned}ax+2y&=a\\ 8x+ay&=2a.\end{aligned}$; ф) $\begin{aligned}2x-ky&=3\\ 6x-9y&=9.\end{aligned}$

г) $\begin{aligned}|x-1|+|y-5|&=1\\ y&=5+|x-1|.\end{aligned}$;

х) $\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}&=5\\ \frac{1}{3x}-\frac{5}{2y}&=-2\frac{1}{6}.\end{aligned}$; и) $\begin{aligned}\frac{2}{x-y}+\frac{6}{x+y}&=1{,}1\\ \frac{4}{x-y}-\frac{9}{x+y}&=0{,}1.\end{aligned}$

3. Решити следеће неједначине

а) $\frac{2x+9}{3}-\frac{x+4}{2}>\frac{x+6}{2}-\frac{x+6}{3}-1;$ б) $\frac{x+0{,}5}{4}+\frac{x-0{,}25}{4}+\frac{x-0{,}125}{8}<0;$

в) $|x-3|+|x+3|+|x-1|<10;$ г) $|x|+|x-1|+|x-2|>3;$

д $(x+1)(3-2x)<0;$ ђ) $(2-x)(x+4)(x+3)>0;$

е) $\frac{3|x|-2}{|x|-1}\geq 2;$ ж) $\frac{(2x+3)(4x-1)}{2-x}>0;$

4. Решити следеће системе неједначина

а) $\left.\begin{aligned}-3x+2y&\leq 10\\ 9x+4y&\leq 56\\ 3x+5y&\geq 4\end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned}-x+y&\leq 2\\ 5x+2y&\geq 10\\ 5x-2y&\leq 10\end{aligned}\right\}$;

5. Решити следеће једначине

а) $x^4-13x^2+36=0;$ б) $x^4-10x^2+9=0;$

ц) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0;$ д) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0;$

е) $\left|x^2-4\right|-2\left|x^2-9\right|=14-x^2;$ ф) $\left|x^2-1\right|-|x|+|2x+3|=4x-6;$

6. У једначини $x^2-7x+2m-4=0$ одредити вредност реалног параметра m за које ће једначина имати а) оба решења позитивна б) реална решења супротог знака.

7. Одреди природу и знак решења једначине $x^2-2x+m-3=0$, где је $m\in R.$

8. Не решавајући једначину $x^2+4x-3=0$ одреди вредност израза:

а) $x_1^2+x_2^2;$ б) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1};$ ц) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2};$ д) $\frac{3x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2}{x_1x_2^2+x_1^2x_2}.$

9. Ако су x_1, x_2 решења једначине $x^2-15x+17=0$ написати једначину чија су решења: а) $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2};$ б) $x_1^2, x_2^2.$

10. Решити систем једначина

а) $\begin{aligned}2x-3y+6&=0\\ 4x^2-y^2-4x+1&=0\end{aligned}$; б) $\begin{aligned}x+y&=4\\ x^2+y^2-4x&=0.\end{aligned}$; ц) $\begin{aligned}5x+7y&=61\\ xy&=8.\end{aligned}$; д) $\begin{aligned}3x-4y+12&=0\\ xy&=4.\end{aligned}$

11. Решити систем једначина

а) $\begin{matrix} x^2+xy+y^2=4 \\ x+xy+y=2 \end{matrix}$; б) $\begin{matrix} x^2+y^2=25 \\ x^2+2y^2=41 \end{matrix}$

12 У једначини $x^2-7x+m-1=0$ одреди реалан број m ако је $x_1=x_2+3$.

13. У једначини $x^2-8x+q=0$ одреди реалан број q ако је $x_1=3x_2$.

14. У једначини $x^2-(2m+1)x+5m-4=0$ одреди реалан број m ако је $4x_1-x_2=10$.

15. Решити следеће квадратне неједначине

а) $\dfrac{-x^2+2x-3}{x^2-4x+3}<3$; б) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1$; ц) $\left(\dfrac{x-5}{2x-3}\right)^2>1$;

д) $\dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}\geq 2$; е) $\dfrac{|2x-3|+x}{x^2-3x+2}<1$.

16. Решити следеће једначине

а) $\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}=5$; б) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=1$;

ц) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-8}$; д) $\sqrt{4x+5}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}$;

е) $1-x=\sqrt{3x^2-7x+3}$; ф) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=0$; г) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}=0$.

17. Решити следеће неједначине

а) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; б) $\sqrt{-x^2+x+6}>1-x$;

ц) $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-1$; д) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+7}{x-2}}<2$;

е) $\sqrt{x+7}>\dfrac{|x-5|}{4}$; ф) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-5}<4$.

Упутства и решења

1. Опште упутство за решавање једначина је у ослобађању од разломака и заграда што се врши одговарајућим множењем. Потом се раздвоје познате и непознате и тиме полазна једначина сведе на најједноставнији могући облик (1), који се лако разрешава. Провера решења је обавезна. Тиме се уверавамо барем у тачност поступка.

а) Треба наћи НЗС за имениоце и са њим помножити сваки члан једначине, чиме се ослобађамо од разломака. Имамо

$x^2-1=(x-1)(x+1)$;

$x^2-2x+1=(x-1)^2$;

$\underbrace{x^3-x^2}\underbrace{-x+1}=x^2(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1)$;

Сваки члан једначине множимо са $(x-1)^2(x+1)$. Имамо

$$(x-1)^2(x+1).\frac{7}{x^2-1}+(x-1)^2(x+1).\frac{8}{x^2-2x+1}=(x-1)^2(x+1).\frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}.$$

После скраћивања добијамо

$7(x-1)+8(x+1)=37-9x$,

Ослобађањем од заграда и одвајањем познатих од непознатих добијамо $24x=36$, односно $x=\dfrac{3}{2}$. Остаје још да се решење провери. Проверу вршимо срачунавањем израза техником "део по део". Тако налазимо

$$\frac{7}{1{,}5^2-1}=\frac{7}{1{,}25}=\frac{28}{5};\quad \frac{8}{1{,}5^2-2\cdot 1{,}5+1}=32;\quad \frac{37-9\cdot 1{,}5}{1{,}5^3-1{,}5^2-1{,}5+1}=\frac{188}{5};\quad \frac{28}{5}+32=\frac{188}{5},\ \text{тачно.}$$

б) Треба видети да је $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3.$ Помножити целу једначину са $(x-1)(x+3)$, после скраћивања добијамо

$(x+1)(x+3)-(x+2)(x-1)+4=0.$

Добија се $x=-3.$ Овде приликом покушаја провере видимо да се појављује дељење са нулом у другом и трећем разломку. Закључак, једначина нема решења.

ц) Прво се ослободимо заграда, добијамо

$$6-\frac{2x+1}{3}+\frac{1+3x}{4}=5-\frac{7x-1}{8}+\frac{5-2x}{3}.$$

Множимо сваки члан једначине са 24 добијамо

$$24\cdot 6-24\cdot\frac{2x+1}{3}+24\cdot\frac{1+3x}{4}=24\cdot 5-24\cdot\frac{7x-1}{8}+24\cdot\frac{5-2x}{3}.$$

После скраћивања разломака враћају се заграде. Имамо

$$144-8\cdot(2x+1)+6\cdot(1+3x)=120-3\cdot(7x-1)+8\cdot(5-2x).$$

Ослобађањем од заграда и пребацивањем налазимо $x=\frac{21}{59}.$ Још треба проверити.

д) Слично као под ц). Добија се $x=5.$

е) Апсолутна вредност мења знак у околини нуле. Зато прво одредимо све нуле свих апсолутних вредности. Тиме бројну праву поделимо на интервале одређене тим нулама. У сваком од тих интервала треба одредити знак израза под апсолутним вредностима. То записујемо табелом. Сада се решавање полазне једначине своди на решавање више једначина, у свакомм интервалу по једне, а укупно решење је унија свих тако добијених решења.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(-1,2)$
$x+1$	-		-		+		+
$x-2$	-		-		-		+
$x+2$	-		+		+		+

У овом примеру решавамо четири различите једначине. У свакој области по једну.

¡) за $x\in(-\infty,-2)$ сви изрази под апсолутним вредностима су негативни па се добија једначина

$$-(x+1)-(x-2)=-(x+2),$$

лако се налази $x=3.$ Што није решење јер не припада посматраној области.

¡¡) за $x\in(-2,-1),$ изрази у прве две апсолутне вредности су негативни а у трећој је позитиван. Тако добијамо

$$-(x+1)-(x-2)=x+2,$$

лако се налази $x=-\frac{1}{3},$ што такође није решење јер није из посматраног интервала.

¡¡¡) за $x\in(-1,2)$, негативана је само друга апсолутна вредност. Имамо

$$x+1-(x-2)=x+2,$$

налазимо $x=1,$ што јесте решење полазне једначине.

¡v) за $x\in(2,\infty),$ сви изрази под апсолутним вредностима су позитивни. Имамо

$$x+1+x-2=x+2,$$

налазимо $x = 3,$ што јесте решење. Укупно имамо два решења $x = 1$ и $x = 3.$

ф) Аналогно решавати као и под е). Решења су сви бројеви $x \geq 6.$

г) Посматрати посебно бројилац и именилац. Решавати као под е). Решење $x = \frac{1}{6}.$ При решавању помножити са имениоцем.

х) Решавати као под е). Решења су $x = \frac{5}{3}$ и $x = \frac{11}{5}.$

и) Разликовати случајеве $x > 0$ и $x < 0$. Решења нема.

ј) Треба бити пажљив у налажењу свих тачака промене знака. Тако треба решити $x = 0$, па потом $3|x| - 6 = 0$, па потом још и $x + 3 = 0.$ Промене знака су у: $x = -3,$ $x = -2$, $x = 0$ и $x = 2$. Направити табелу као под е) итд. Решења су: $x = -\frac{12}{5}$, $x = 0$, и $x = 12$.

к) Пошто су a, b параметри, па дакле непознате величине треба дискутовати када једначину делимо или множимо са непознатим параметром. Ако се појављује и непозната онда треба искључити из скупа решења оне вредности за које би тај множилац или делилац био нула.

Множимо једначину са $(1 - bx)(1 - ax)$ уз ограду да за $a \neq 0$ и $b \neq 0$ решења не могу бити $x = \frac{1}{a}$ или $x = \frac{1}{b}.$ Тако добијамо

$$(1 - bx)(1 - ax)\frac{a}{1 - bx} = (1 - bx)(1 - ax)\frac{b}{1 - ax}.$$

$$x(b - a)(b + a) = b - a.$$

Разликујемо два случаја

$i)$ За $a = b$ једначина је неодређена али решење не може бити $x = \frac{1}{a}$.

$ii)$ За $a \neq b$ опет разликујемо два сучаја

за $a + b = 0$, једначина је немогућа

за $a + b \neq 0$ јединствено решење $x = \frac{1}{a + b}$. У овом случају морамо искључити да решења буду $x = \frac{1}{a}$ и $x = \frac{1}{b}.$ То је за $a \neq 0$ и $b \neq 0.$ Сада све добијене резултате обједнимо у једну целину.

За $a = 0$ и $b = 0$ једначина је неодређена;

За $a = 0$ и $b \neq 0$ једначина је немогућа;

За $a \neq 0$ и $b = 0$ једначина је немогућа;

За $a = b \neq 0$ једначина неодређена решења су сви бројеви из скупа $R \setminus \left\{\frac{1}{b}\right\}.$

За $a = -b \neq 0,$ једначина немогућа;

У осталим случејевима једначина је могућа и решење је $x = \frac{1}{a + b}.$

л) Треба помножити са $ab(x - a)(x - b)$. мора се претпоставити да је $a \neq 0, b \neq 0$ и решења не могу бити $x = a$ или $x = b.$ После множења и скраћивања добијамо

$$b(x - b) + b(x - a) + a(x - b) + a(x - a) = 0.$$

Сређивањем и пребацивањем добијамо

$$2x(a + b) = (a + b)^2.$$

Разликујемо два случаја

¡) за $a + b = 0$ једначина је неодређена. Решење су сви бројеви из скупа $R \setminus \{a, -a\}.$

¡¡) за $a+b\neq 0$ једначина је могућа. Решење $x=\frac{a+b}{2}$, $a\neq b$.

Ако све објединимо имамо:

За $a=0$ или $b=0$ једначина немогућа.

За $a\neq 0$ и $b\neq 0$ али $a+b=0$, једначина неодређена. Решења $x\in R\setminus\{a,-a\}$.

За $a\neq 0$ и $b\neq 0$ и $a=b$ једначина немогућа.

За $a\neq 0$ и $b\neq 0$ и $a\neq -b$ и $a\neq b$ једначина је могућа. Решење $x=\frac{a+b}{2}$.

м) Треба приметити да је $(x-5)(x+6)=x^2+x-30$, па потом целу једначину помножити са $(x-5)(x+6)$. Решење је $x=0$.

н) Помножити једначину са $(a-2)(a^2+4a+4)$. Претпоставити да је $a\neq 2$. Добијамо

$x=\frac{4(a+1)}{a^2+4a+2}$, за $a\neq 2$. За $a=2$ једначина немогућа.

2. а) Треба увести нове промењљиве дате са $u=xy+2x+5$, $v=3xy-8x+1$, па заменом добијамо систем

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{10}+\frac{v}{4}&=9\,/\cdot 20\\ \frac{u}{10}-\frac{v}{2}&=0\,/\cdot 10\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2u+5v&=180\\ u-5v&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}3u&=180\\ 15v&=180\end{aligned}\right\},\ u=60,\ v=12.$$

Сада решавамо систем

$$\left.\begin{aligned}xy+2x+5&=60\,/\cdot -3\\ 3xy-8x+1&=12\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}-3xy-6x-15&=-180\\ 3xy-8x+1&=12\end{aligned}\right\}+,$$

сабирањем једначина добијамо

$-14x-14=-168$, односно $x=11$. Заменом у прву једначину налазимо $y=3$.

б) Прво увести смене: $u=\frac{4x-5y}{13}$, $v=\frac{3x+7y}{8}$, тако добијамо систем

$$\left.\begin{aligned}2u-v&=1\\ u+v&=8\end{aligned}\right\}\ u=3,\ v=5.$$

Сада разрешавамо смене

$$\left.\begin{aligned}4x-5y&=39\\ 3x+7y&=40\end{aligned}\right\}\quad x=\frac{39\cdot 7-(-5)\cdot 40}{4\cdot 7-(-5)\cdot 3}=11,\quad y=\frac{4\cdot 40-3\cdot 39}{4\cdot 7-(-5)\cdot 3}=1.$$

ц) Прво се треба ослободити од разломака множењем. Тако добијамо систем

$$\left.\begin{aligned}(x+3)(y+3)&=(x+5)(y+2)\\ x(y+1)-y(x+5)&=8\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}xy+3x+3y+9&=xy+5y+2x+10\\ xy+x-yx-5y&=8\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x-2y&=1\\ x-5y&=8\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow x=-\frac{11}{3},\ y=-\frac{7}{3}$$

.

д) Треба приметити да друга једначина садржи прву. Зато њиховим одузимањем добијамо

$\frac{3x+2y}{xy}-\frac{x+2y}{xy}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}$, односно $\frac{2x}{xy}=-\frac{1}{3}$, дакле $y=-6$. Другу непознату налазимо из било које једначине заменом добијене вредности за y. Добијамо $x=2$.

е) Применом формула за решавање налазимо да је

$$x=\frac{a^2-4a}{a^2-16}=\frac{a(a-4)}{(a-4)(a+4)},\quad y=\frac{2a^2-8a}{a^2-16}=\frac{2a(a-4)}{(a-4)(a+4)},$$

што претставља решење само ако именилац није нула, тј. ако је $a\neq 4$ и $a\neq -4$. С тога разликујемо следећа три случаја:

¡) Ако је $a = 4.$ Заменом у систем он постаје

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = 4 \\ 8x + 4y = 8 \end{array}\right\},$$

с обзиром да су то две исте једначине, систем је неодређен. Решење тог система је сваки уређени пар $(\alpha,\ 2-2\alpha),\ \alpha \in R.$

¡¡) Ако је $a = -4$. Заменом у систем добијамо

$$\left.\begin{array}{l} -4x + 2y = -4 \\ 8x - 4y = -8 \end{array}\right\},$$

Множењем прве једначине са 2 и сабирањем са другом добијамо $0 = -16,$ дакле, систем је немогућ.

¡¡¡) За $a \neq 4$ и $a \neq -4$ систем је могућ и решења су $x = \dfrac{a}{(a+4)},\ \ y = \dfrac{2a}{(a+4)}.$

ф) Применом формула за решавање добијамо

$$x = \frac{3(3-k)}{2(k-3)}, \qquad y = 0,$$

што јесте решење само ако је $k \neq 3.$ С тога разликујемо 2 случаја:

¡) Ако је $k = 3$, заменом у систем он постаје

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 3 \\ 6x - 9y = 9 \end{array}\right\},$$

Ово су две еквивалентне једначине па је систем неодређен. Решење система је сваки уређен пар $\left(\dfrac{3+3\alpha}{2},\ \alpha\right),\ \alpha \in R.$

¡¡) За $k \neq 3$ систем је могућ и решење му је $x = -\dfrac{3}{2},\ \ y = 0.$

г) Изрази под апсолутним вредностима су нула дуж права $x = 1$ и $y = 5.$ Те две праве деле целу раван на четири области и то: ¡) $x \geq 1, y \geq 5;$ ¡¡) $x \geq 1, y \leq 5;$ ¡¡¡) $x \leq 1, y \geq 5;$ ¡v) $x \leq 1, y \leq 5.$ Сада се систем решава у свакој од области посебно и у свакој од њих апсолутне вредности се могу скинути јер је у свакој тачки исте области знак израза под апсолутним вредностима једнак.

i) У првој области је $x-1 \geq 0,\ y-5 \geq 0$, па систем постаје

$$\left.\begin{array}{l} x-1+y-5=1 \\ y=5+x-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ -x+y=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{11}{2} \end{array}\right\},$$

што јесте решење јер припада посматраној области;

ii) У другој области је $x-1 \geq 0,\ y-5 \leq 0$, па систем постаје

$$\left.\begin{array}{l} x-1-y+5=1 \\ y=5+x-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=-3 \\ -x+y=4 \end{array}\right\},$$

Сабирањем ове две једначине закључујемо да је систем немогућ, па нема решења;

iii) У трећој области је $x-1 \leq 0,\ y-5 \geq 0$, па систем постаје

$$\left.\begin{array}{l} -x+1+y-5=1 \\ y=5-x+1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y=5 \\ x+y=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{11}{2} \end{array}\right\},$$

што јесте решење јер припада посматраној области;

iv) У трећој области је $x-1 \leq 0,\ y-5 \leq 0$, па систем постаје

$$\left.\begin{array}{l} -x+1-y+5=1 \\ y=5-x+1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -x-y=-5 \\ x+y=6 \end{array}\right\},$$

добијени систем је несагласан па нема решења.
Дакле, постоје два решења полазног система.

х) Прво увести смене $u=\frac{1}{x},\ v=\frac{1}{y}$, чиме добијамо систем

$$\left.\begin{array}{l} 2u+3v=5 \\ \frac{1}{3}u-\frac{5}{2}v=-2\frac{1}{6} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2u+3v=5 \\ 2u-15v=-13 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} u=1 \\ v=1 \end{array}\right\}.$$

Разрешењем уведених смена добијамо $x=1,\ y=1.$

и) Увести смене $u=\frac{2}{x-y},\ \ v=\frac{3}{x+y}$, чиме добијамо систем

$$\left.\begin{array}{l} u+2v=1{,}1 \\ 2u-3v=0{,}1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} u=0{,}5 \\ v=0{,}3 \end{array}\right\}.$$

Сада разрешавањем смене добијамо решење

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x-y}=0{,}5 \\ \frac{3}{x+y}=0{,}3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=7 \\ y=3 \end{array}\right\}.$$

3. Поступак решавања је сличан поступку решавања једначина.

а) Помножимо сваки члан неједначине са 6 добијамо

$$2(2x+9)-3(x+4)>3(x+6)-2(x+6)-6.$$

После ослобађања од заграда и пребацивањем добијамо $0>-6,$ што је тачно.
Отуда је решење сваки реалан број.

б) Множењем са 4 сваког члана неједначине добијамо

$$2(x+0{,}5)+2(x-0{,}25)+x-0{,}125<0.$$

Ослобађањем од заграда и пребацивањем добијамо

$$5x<-0{,}375,$$

односно $x<-0{,}075.$

в) Апсолутне вредности мењају знаке у околини тачака редом $x=3,\ x=-3,\ x=1.$
Тим тачкама бројна права је подељена на интервале: $(-\infty,-3),\ \ (-3,\ 1),\ \ (1,\ 3),\ \ (3,\ \infty).$
У свакој од тих област о одређујемо знаке израза под апсолутним вредностима и посебно решавамо сваку добијену неједначину у посматраној области. Разликујемо следеће случајеве:

¡) За $x\in(-\infty,\ -3),$ је: $x-3<0,\ \ x+3<0,\ \ x-1<0,$ Па се добија неједначина

$$-x+3-x-3-x+1<10,$$

што даје неједначину

$-3x<9,$ што је еквивалентно са $x>-3.$ Како добијено решење нема пресек са посматраном облашћу то у овом случају нема решења.

¡¡) За $x\in(-3,\ 1),$ је: $x-3<0,\ \ x+3>0,\ \ x-1<0,$ Па се добија неједначина

$$-x+3+x+3-x+1<10,$$

што даје неједначину

$-x<3,$ што је еквивалентно са $x>-3.$ Дакле, решење је област $x\in(-3{,}1).$

¡¡¡) За $x\in(1,\ 3),$ је: $x-3<0,\ \ x+3>0,\ \ x-1>0,$ Па се добија неједначина

$$-x+3+x+3+x-1<10,$$

што даје неједначину

$$x<5.$$

И у овом случају је решење цео посматрани интервал $x \in (1,\ 3)$.

¡v) За $x \in (3,\ \infty)$, је: $x-3>0,\quad x+3>0,\quad x-1>0,$ па се добија неједначина

$$x-3+x+3+x-1<10,$$

што даје неједначину $3x<11,$ што је еквивалентно са $x<\frac{11}{3}$. Пресек решења и полазне области даје решење у овом случају, а то је $x \in \left(3, \frac{11}{3}\right)$.

Укупно решење је унија свих добијених решења. Дакле, $x \in \left(-3, \frac{11}{3}\right)$.

г) Апсолутне вредности мењају знаке у околини тачака: $x=0,\ x=1$ и $x=2$.
Тим тачкама бројна права је подељена на интервале: $(-\infty, 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ \infty)$.
У свакој од наведених области одређујемо знаке израза под апсолутним вредностима и посебно решавамо сваку добијену неједначину у посматраној области. Разликујемо следеће случајеве:

¡) За $x \in (-\infty,\ 0)$, је: $x<0,\quad x-1<0,\quad x-2<0,$ добија се неједначина

$$-x-x+1-x+2>3,$$

што даје неједначину $-3x>0,$ што је еквивалентно са $x<0$. Добијено решење се поклапа са посматраном облашћу. Дакле у овом случају решење је $x \in (-\infty, 0)$.

¡¡) За $x \in (0,\ 1)$, је: $x>0,\quad x-1<0,\quad x-2<0,$ добија се неједначина

$$x-x+1-x+2>3,$$

што је еквивалентно са неједначином $x<0,$ која нема решења у полазној области.

iii) За $x \in (1, 2)$, је: $x>0,\quad x-1>0,\quad x-2<0,$ добија се неједначина

$$x+x-1-x+2>3,$$

што даје неједначину $x>2,$ која у односу на претпостављену област нема решење.

¡v) За $x \in (2, \infty)$, је: $x>0,\quad x-1>0,\quad x-2>0,$ добија се неједначина

$$x+x-1+x-2>3,$$

што даје неједначину $3x>6,$ која је еквивалентна са $x>2$. Решење је $x \in (2, \infty)$.
Укупно решење је унија свих добијених. Дакле, $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

д) Дата неједначина се назива неједначина знака. То отуда што је на једној страни производ и/или количник, а на другој нула. Најлакше се решавају прављењем следеће табеле.

	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},\ \infty\right)$
$x+1$	-	+	+
$3-2x$	+	+	-
$(x+1)(3-2x)$	-	+	-

Из табеле се "чита" да је решење $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

ђ) За ову неједначину имамо следећу табелу

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-3)$	$(-3,2)$	$(2,\infty)$
$2-x$	+	+	+	-
$x+4$	-	+	+	+
$x+3$	-	-	+	+
$(2-x)(x+4)(x+3)$	+	-	+	-

Из табеле се "чита" да је $x\in(-\infty,-4)\cup(-3,2)$.

е) Разликујемо два случаја:

¡) За $x<0$ имамо да је

$$\frac{-3x-2}{-x-1}\geq 2,$$

што је еквивалентно са неједначином

$$\frac{3x+2}{x+1}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}\geq 0.$$

Одговарајућа табела је

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ \infty)$
x	-	-	+
$x+1$	-	+	+
$\frac{x}{x+1}$	+	-	+

Из табеле се "чита" $x\in(-\infty,-1)\cup[0,\infty)$. Пресек са полазном облашћу даје решење $x\in(-\infty,-1)$.

¡¡) За $x>0$ имамо да је

$$\frac{3x-2}{x-1}\geq 2,$$

што је еквивалентно са неједначином

$$\frac{3x-2}{x-1}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}\geq 0.$$

Одговарајућа табела је

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\ \infty)$
x	-	+	+
$x-1$	-	-	+
$\frac{x}{x-1}$	+	-	+

Из табеле се "чита" $x\in(-\infty,0])\cup(1,\infty)$. Пресек са полазном облашћу даје решење $x\in(1,\infty)$.

Укупно решење је унија добијених решења. Дакле, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

ж) Одговарајућа табела за ову неједначину знака је

	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4},2\right)$	$(2,\infty)$
$2-x$	+	+	+	-
$2x+3$	-	+	+	+
$4x-1$	-	-	+	+
$\frac{(2x+3)(4x-1)}{2-x}$	+	-	+	-

Из табеле се "чита" решење $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, 2\right)$.

4. Овакви системи неједначина се најлакше решавају графички. У координатном систему се нацрта права одређена неком неједнакошћу. Права дели све тачке равни на два дела. У свакој тачки једне од полуравни важи иста неједнакост. Означимо ону полураван која се слаже са задатом. Решење је пресек свих означених појединачних области.

а) Цртамо праву $-3x + 2y - 10 = 0$. Тражено решење је "испод" нацртане праве. Потом цртамо праву $9x + 4y - 56 = 0$. Опет је решење "испод" нацртане праве. коначно цртамо праву $3x + 5y - 4 = 0$. Сада је решење "изнад" те праве. Укупно решење је оно које је заједничко за све добијене полуравни. Ако смо их шрафирали онда је решење троугаона област, тј. она која је три пута шрафирана.

б) Потпуно исто се решава.

5. а) Овакве једначине се називају биквадратне. Решавају се увођењем смене $y = x^2$, после чега се полазна једначина претвара у квадратну. Решавањем квадратне једначине добијамо могућа решења. После разрешавања смене добијамо решења полазне једначине.

После увођења смене $y = x^2$ добијамо једначину

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Решења су $y_1 = 9,\ y_2 = 4,$ одавде следи $x^2 = 9, \quad x^2 = 4.$

Одавде су решења полазне једначине: $x_1 = -3, x_2 = 3,\ x_3 = -2, x_4 = 2.$

б) Исто као под а). Решења су: $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

ц) Ова једначина спада у класу која се назива једначине са симетричним коефицијентима. Сваки члан једначине се подели са x^2. За даље се мора увести смена $y = x + \frac{1}{x}$, чијим квадрирањем се налази да је $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, заменом у једанчину добија се квадратна. Њеним решавањем треба решити и уведену смену.

После дељења са x^2, добијамо

$$x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Увођењем смене добија се $y^2 - 2 - 2y - 1 = 0,$ чија су решења $y_1 = -3, y_2 = 1$. Сада решавамо смену: $y + \frac{1}{y} = -3,\ \ y + \frac{1}{y} = 1,$ чиме добијамо $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; друга нема решења у скупу реалних бројева.

д) Исто као под ц). Решења су $y_1 = \frac{5}{2}, y_2 = -\frac{10}{3};\ \ x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = 3.$

е) Израз под првом апсолутном вредношћу мења знак у тачкама $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$, а израз у другој апсолутној вредности мења знак у $x_3 = -3$ и $x_4 = 3$. Следећа табела приказује како се ти знаци мењају

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$x^2 - 4$	+	+	-	+	+
$x^2 - 9$	+	-	-	-	+

Разликујемо следећа три случаја:

¡) За $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ имамо да су изрази у обе апсолутне вредности позитивни

$$x^2-4-2\left(x^2-9\right)=14-x^2,$$

разрешење даје $14=14,$ што значи да су решења све тачке посматране области.

ii) За $x\in(-3,-2)\cup(2,3)$ израз унутар прве апсолутне вредности је позитиван, а други негативан. Тако имамо

$$x^2-4+2\left(x^2-9\right)=14-x^2,$$

разрешавањем добијамо $4x^2=36,$ што даје решења $x_1=-3, x_2=3$ која припадају посматраној области.

iii) За $x\in(-2,2)$ изрази под оба модула су негативни па имамо

$$-x^2+4+2\left(x^2-9\right)=14-x^2,$$

Разрешавањем добијамо $2x^2=28\Leftrightarrow x_1=\sqrt{14},\ x_2=-\sqrt{14},$ што нису решења, јер не припадају посматраној области.

Решење чине сви бројеви у области $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty).$

ф) Решавати посебно једначину у интервалима: $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{3}{2},-1\right),\ (-1,0),\ (0,1),$ $(1.+\infty).$

6. а) Да би решења уопште имала знак прво морају бити реална, а да би оба била позитивна треба и збир и производ да буде позитуван. Дакле, имамо систем

$$\delta=b^2-4ac>0\wedge x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0\wedge x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}>0.$$

У нашем случају треба да је

$$49-4(2m-4)>0\wedge-\frac{-7}{1}>0\wedge\frac{2m-4}{1}>0$$

Решење је $x\in\left(2,\frac{65}{8}\right).$

б) Решења морају бити реална и производ мањи од нуле. Добијамо систем

$$\delta=b^2-4ac>0\wedge x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0.\ \text{односно}\ 49-4(2m-4)>0\wedge\frac{2m-4}{1}<0$$

Решење је $x<2.$

7. Решења су реална и различита ако је $\delta>0,$ реална и иста ако је $\delta=0$ и конјуговано комплексна ако је $\delta<0.$ Како је $\delta=4-4(m-3),$ налазимо да су решења реална и различита за $m<4,$ реална и иста за $m=4$ и конјуговано комплексна за $m>4.$

8. Прво се напишу Виетове формуле, па потом се сви изрази преко њих прерачунају.

$$x_1+x_2=-4$$
$$x_1x_2=-3$$

а) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16+6=22;$

б) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=-\frac{22}{3};$

ц) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{4}{3};$

д) $\frac{3x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2}{x_1x_2^2+x_1^2x_2}=\frac{3(x_1+x_2)^2-10x_1x_2}{x_1x_2(x_1+x_2)}=\frac{3\cdot(-4)^2-10(-3)}{-3\cdot(-4)}=\frac{78}{12}=\frac{13}{2}.$

9. Једначину добијамо помоћу Виетових формула. Из полазне једначине је $x_1+x_2=15,\ x_1\cdot x_2=17.$

а) Налазимо да је

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{15}{17},\quad \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{17},$$

зато је тражена једначина облика $y^2-\frac{15}{17}y+\frac{1}{17}=0.$

б) Налазимо да је

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=191,\quad x_1^2x_2^2=289,$$

зато је тражена једначина облика $y^2-191y+289=0.$

10. Овакви системи се решавају методом замене. Израчуна се непозната из линеарне једначине и замени у другу. На тај начин друга једначина постане једначина са једном непознатом коју треба решити. Разрешењем смене добија се решење система.

а) Из прве једначине је $y=\frac{2x+6}{3}$. Заменом у другу и сређивањем добијамо квадратну једначину

$$32x^2-60x-27=0,$$

чија су решења $x_1=\frac{9}{4},\ x_2=-\frac{3}{8}$. Налазимо $y_1=\frac{7}{2},\ y_2=\frac{7}{4}$.

б) Смена $y=4-x$ другу једначину претвара у $x^2-6x+8=0,$ чија су решења $x_1=2,\ x_2=4$. Налазимо $y_1=2,\ y_2=0.$

ц) Из друге једначине $x=\frac{8}{y}$, заменом у прву даје $7y^2-61y+40=0.$ Решења су $y_1=\frac{5}{7},\ y_2=\frac{56}{7}$. Налазимо да је $x_1=\frac{56}{5},\ x_2=1.$

д) Из друге једначине $x=\frac{4}{y}$, заменом у прву даје $-4y^2+12y-4=0.$ Решења су $y_1=\frac{3+\sqrt{8}}{2},\ y_2=\frac{3-\sqrt{8}}{2}$. Налазимо да је $x_1=8(3-\sqrt{8}),\ x_2=8(3+\sqrt{8})$.

11. а) Уводимо смене $u=x+y,\ v=xy,$ систем постаје

$$\left.\begin{array}{l}u^2-v=4\\ u+v=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}v=2-u\\ u^2+u-6=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}u_1=2,u_2=-3\\ v_1=0,v_2=5\end{array}\right\}.$$

Добијамо два система

$$\left.\begin{array}{l}x+y=2\\ xy=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=0,x_2=2\\ y_1=2,y_2=0\end{array}\right\},\text{ и систем }\left.\begin{array}{l}x+y=-3\\ xy=5\end{array}\right\}\text{ нема реалних решења.}$$

б) Одузимањем прве једначине од друге добијамо

$$y^2=16.$$

Заменом у прву једначину налазимо $x^2=9.$ Одавде закључујемо да има 4 решења и то: $(-4,-3)$; $(-4,3)$; $(4,-3)$; $(4,3)$.

12 Из формула за налажење корена квадратне једначине датих са $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, налазимо да је $x_1-x_2=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$. У овом примеру је $x_1-x_2=3,$ па добијамо једначину $\sqrt{49-4(m-1)}=3,$ налазимо да је $m=11.$

13. Као у задатку 12. налазимо $x_1 = 4+\sqrt{16-q}$, и $x_2 = 4-\sqrt{16-q}$. По услову задатка следи да треба да буде $4+\sqrt{16-q} = 3\left(4-\sqrt{16-q}\right)$. Одавде је $\sqrt{16-q} = 2$, односно $q = 12$.

14. Налазимо $x_1 = \dfrac{2m+1+\sqrt{(2m+1)^2-4(5m-4)}}{2}$, $x_2 = \dfrac{2m+1-\sqrt{(2m+1)^2-4(5m-4)}}{2}$.

заменом у услов добијамо $2\left(2m+1+\sqrt{4m^2-16m+17}\right) - \dfrac{2m+1-\sqrt{4m^2-16m+17}}{2} = 10.$

После сређивања налазимо $5\sqrt{4m^2-16m+17} = 17-6m.$ После квадрирања и сређивања добијамо $16m^2-49m+34=0.$ Решења ове једначине су $m_1 = \dfrac{17}{16}, m_2 = 2.$

15. У табели претставимо знаке квадратног тринома у односу на његове нуле. Резултат се само "прочита" из табеле.
а) Прво треба све пребацити на исту страну да би се добила неједначина знака. Имамо

$$\frac{-x^2+2x-3}{x^2-4x+3} < 3 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x-3}{x^2-4x+3} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^2+14x-12}{x^2-4x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3} > 0.$$

Сада налазимо нуле сваког од тринома. $2x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x_1=2, x_2=\dfrac{3}{2}.$

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x_1=1, x_2=3.$ Табела знакова тринома је

	$(-\infty,1)$	$\left(1,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},2\right)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$2x^2-7x+6$	+	+	-	+	+
x^2-4x+3	+	-	-	-	+
$\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-4x+3}$	+	-	+	-	+

Укупно решење је: $x \in (-\infty,1) \cup \left(\dfrac{3}{2},2\right) \cup (3,\infty)$.

б) Као под а) имамо

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x}{x^2+3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+3x+2} \leq 0.$$

$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=-2, x_2=-1.$ Табела са знацима је

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
x	-	-	-	+
x^2+3x+2	+	-	+	+
$\dfrac{x}{x^2+3x+2}$	-	+	-	+

Из табеле се "чита" да је решење $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,0]$.
ц) Пребацивањем на исту страну и растављањем као разлике квадрата имамо

$$\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x-3}{2x-3}-1\right)\left(\frac{x-3}{2x-3}+1\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{2x-3} \cdot \frac{3x-6}{2x-3} > 0.$$

Квадрат је увек позитиван, па добијамо $-x(3x-6) > 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) > 0.$ Именилац не сме бити нула зато искључујемо $x \neq \dfrac{3}{2}$. Табела је сада

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$x(x-2)$	+	-	+

Решење је $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

д) Правимо неједначину знака. Имамо

$$\frac{|x-2|}{x^2-3x+2}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{|x-2|}{x^2-3x+2}-2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{|x-2|-2x^2+6x-4}{x^2-3x+2}\ge 0.$$

Разликујемо два случаја:

¡) за $x>2$ имамо

$$\frac{|x-2|-2x^2+6x-4}{x^2-3x+2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x-6}{x^2-3x+2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(\frac{3}{2}-x\right)(x-2)}{(x-1)(x-2)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3-2x}{x-1}\ge 0,$$

Нема решење јер добијено није у претпостављеној области.

¡¡) За $x<2$ имамо

$$\frac{|x-2|-2x^2+6x-4}{x^2-3x+2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+5x-2}{x^2-3x+2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}-x\right)(x-2)}{(x-1)(x-2)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x-1}\ge 0,$$

Решење је $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, што је уједно и укупно решење.

е) Слично као под д) имамо

$$\frac{|2x-3|+x}{x^2-3x+2}<1 \Leftrightarrow \frac{|2x-3|+x}{x^2-3x+2}-1<0 \Leftrightarrow \frac{|2x-3|-x^2+4x-2}{x^2-3x+2}<0.$$

Разликујемо два случаја:

¡) За $2x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$, имамо

$$\frac{|2x-3|-x^2+4x-2}{x^2-3x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-5}{x^2-3x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x-2}<0.$$

Решење је $x\in(2,5)$.

¡¡) За $2x-3<0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$, имамо

$$\frac{|2x-3|-x^2+4x-2}{x^2-3x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+1}{x^2-3x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(-x+1+\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)}{(x-1)(x-2)}<0.$$

Како је $x<\frac{3}{2}$ то следује да је $x-2<0$ и $-x+1+\sqrt{2}>0$. Зато се последња неједнакост своди на $\frac{x-1+\sqrt{2}}{x-1}>0$, што даје решење $x\in\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)$.

Укупно решење је $x\in\left(-\infty,1-\sqrt{2}\right)\cup(2,5)$.

16. Пре квадрирања увек се једначина напише тако да је са леве стране само један корен, а са десне све остало. После квадрирања и срећивања поступак се понавља.

а) Пре квадрирања једначину запишемо у облику

$$\sqrt{x-5}=5-\sqrt{2-x}.$$

После квадрирања и срећивања добијамо

$$5\sqrt{2-x}=6-x.$$

Поновним квадрирањем добијамо

$$x^2+13x-14=0,$$

кандидати за решења полазне једначине су: $x_1=1$ и $x_2=-14.$ Провером, која је при оваквом решавању обавезна, налазимо да ни један од кандидата не може бити решење полазне једначине.

Други начин. Да би квадратни корени били дефинисани мора бити $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$ и $2-x>0 \Leftrightarrow x<2,$ што незадовољава ни један реалан број. Дакле, једначина није добро дефинисана и не може имати решења.

б) Дата једначина, као и претходна је дефинисана само за $x=\pm 1,$ али ни у једном случају једначина нема решења.

ц) Квадрирањем добијамо

$$2x+3-2\sqrt{(2x+3)(x-1)}+x-1=3x-8.$$

После сређивања налазимо

$$\sqrt{2x^2+x-3}=5.$$

Поновним квадрирањем и сређивања налазимо

$$2x^2+x-28=0.$$

решења ове једначине (кандидати за полазну) су: $x_1=-4$ и $x_2=\frac{7}{2}.$ Провером у једначини решење је само $x=\frac{7}{2}.$

д) Квадрирањем и сређивањем полазне једначине добијамо

$$2\sqrt{2x^2-3x+1}=x+7.$$

Поновним квадрирањем и сређивањем добијамо

$$7x^2-26x-45=0.$$

Решења ове једначине су $x_1=5$ и $x_2=-\frac{9}{7}.$ Провером у полазној једначини решење је само $x=5.$

е) Квадрирањем и сређивањем добијамо

$$2x^2-5x+2=0.$$

Решења ове једначине су $x_1=2$ и $x_2=\frac{1}{2}.$ Заменом у полазну једначину (провером) утврђујемо да је једино решење $x=\frac{1}{2}.$

ф) За треће корене увек се два трећа корена оставе на левој страни, а све остало се пребаци на другу страну па се једначина кубира. Дакле, прво једначину запишемо као $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=-\sqrt[3]{x+2},$ после кубирања (искључиво по формули $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$) Збир трећих корена у загради заменити са изразом на десној страни полазне једначине. Тако добијамо

$$x+x+1+3\sqrt[3]{x(x+1)}\left(-\sqrt[3]{x+2}\right)=-(x+2), \text{ односно } \sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}=x+1.$$

Један кандидат за решење је $x_1=-1.$ Дељењем са $\sqrt[3]{x+1},$ добијамо једначину

$$\sqrt[3]{x^2+2x}=\sqrt[3]{(x+1)^2}, \text{ односно } x^2+2x=x^2+2x+1,$$ што нема решења. Дакле, једино решење је $x=-1.$

г) Пребацивањем другог корена на десну страну и кубирањем добијамо

$$x^2=x, \text{ односно } x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x_1=0, x_2=1.$$

Провером у једначину закључујемо да једначина има два решења: $x_1=0, x_2=1.$

17. Овакве неједначине се решавају поступним квадрирањем све док постоји неки корен. У сваком кораку решавања треба захтевати да:

1) Вредност сваког корена буде позитивна
2) Подкорене величине буду позитивне.

а) Пре квадрирања захтевамо да буде

$4-x\geq 0$ и $3x-x^2\geq 0.$

Одавде се добија да мора бити $x\in[0,3]$.

Затим квадрирамо неједначину и сређивањем добијамо

$2x^2-11x+16>0.$

Добијени трином је позитиван за свако x. Отуда је укупно решење $x\in[0,3]$.

б) Пре квадрирања мора бити $1-x\geq 0$ и $-x^2+x+6\geq 0.$ За то је потребно да буде $x\in[-2,1]$. После квадрирања добијамо

$2x^2-3x-5<0.$

Добијени трином је негативан између његових нула. Дакле, $x\in\left[-1,\frac{5}{2}\right]$.

Упоређујући са већ добијеним условом закључујемо да је $x\in(-1,1)$.

ц) Прво мора бити $\frac{x-2}{1-2x}\geq 0.$ За то мора бити $x\in\left(\frac{1}{2},2\right]$. Вредност корена је увек позитивна па је друга неједнакост увек испуњена. Дакле, укупно решење је $x\in\left(\frac{1}{2},2\right]$.

д) Подкорена величина мора бити позитивна. Дакле,

$$\frac{x^2-4x+7}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow x-2>0\Leftrightarrow x>2,$$

јер је квадратни трином у бројиоцу увек позитиван. После квадрирања имамо

$$\sqrt{\frac{x^2-4x+7}{x-2}}<2\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+7}{x-2}<4\Leftrightarrow\frac{x^2-4x+7}{x-2}-4<0\Leftrightarrow\frac{x^2-8x+15}{x-2}<0\Leftrightarrow\frac{(x-3)(x-5)}{x-2}<0.$$

Решење ове неједначине знака је $x\in(-\infty,2)\cup(3,5)$. С обзиром на полазни услов закључујемо да је решење $x\in(3,5)$.

е) Вредност корена је сигурно позитивна, мора бити и $x+7\geq 0\Leftrightarrow x\geq -7.$ После квадрирања добијамо

$x^2-26x-87<0,$

добијени трином је негативан између његових корена. Решење је $x\in(-3,29)$.
Полазна претпоставка овај закључак не мења.

ф) Прво мора бити $2x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}$ и $x-5\geq 0\Leftrightarrow x\geq 5,$ односно мора бити $x\geq 5.$

Пребацивањем једног корена на другу страну и квадрирањем добијамо

$8\sqrt{x-5}>x-14.$

Поновним квадрирањем добијамо

$x^2-92x+516<0.$

Нуле овог тринома су $x_1=6$ и $x_2=86$. Трином је негативан за $x\in(6,86)$. С обзиром на претходни услов остаје исти закључак: решење је $x\in(6,86)$.

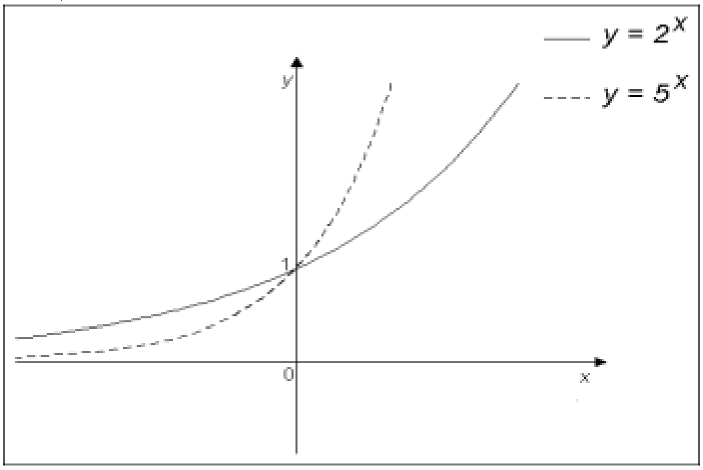
3. Експоненцијална и логаритамска функција

Израз a^x смо већ дефинисали у одељку 1. у случајевима када је степен x прво био природан, па потом цео и рационалан број. Прецизно дефинисање броја a^x за сваки позитиван број a и сваки реалан број x није једноставно, нити се може укратко испричати. С тога уместо строгог дефинисања даћемо следећеи опис. Опис се заснива на интуитивном схватању непрекидности степеновања.

Знамо шта значи 2^x када је x рационалан број. Стога узмимо неколико вредности за x за које је лако израчунати 2^x и резултате сместимо у следећу табелу

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	2	$2\sqrt{2}$	4	8	16

Ако све добијене парове $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$, $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, ... уцртамо у координатни систем Oxy и спојимо их једном непрекидном и глатком линијом долазимо до графика приказаног на слици 1.



Слика 1.

Сада интуитивно можемо разумети да постоји и $2^{\sqrt{3}}$ и да се вредност тог израза може приближно одредити са слике 1. Довољно је на x оси уочити тачку $\sqrt{3}$ и повући одговарајућу ординату. Дужина те дужи до графика је приближна вредност броја $2^{\sqrt{3}}$.

3.1. Особине експоненцијалне функције

Ако је $a > 0$ и $a \neq 1$, експоненцијална функција $f(x) = a^x$ има следеће особине:

і) експоненцијална функција је увек позитивна; $a^x > 0, \forall x \in R.$;

іі) тачна је еквиваленција: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$;

ііі) важе једнакости: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$; $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, где су a, b произвољни позитивни бројеви, а x, y произвољни реални бројеви.

Ако је $a > 1$ експоненцијална функција је растућа и има особине:

$iv)_1 \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$v)_1 \quad x > 0 \Leftrightarrow a^x > 1, \quad \text{и} \quad x < 0 \Leftrightarrow 0 < a^x < 1.$

Ако је $0 < a < 1$, експоненцијална функција је опадајућа и има особине:

$iv)_2 \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$v)_2 \quad x > 0 \Leftrightarrow 0 < a^x < 1, \quad \text{и} \quad x > 0 \Leftrightarrow a^x < 1.$

3.2. Експоненцијална једначина. Дефиниција логаритма

Приликом решавања експоненцијалних једначина основну улогу имају следећа три тврђења:

i) Ако је $a > 0$ и $a \neq 1$, тада важи еквиваленција

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y;$$

ii) Ако је $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ и $a \neq b$, тада важи еквиваленција

$$a^x = b^x \Leftrightarrow x = 0;$$

iii) Ако је $a > 0$ и $a \neq 1$, тада једначина по x

(1) $\qquad a^x = b,$

има једно и само једно решење за $b > 0$, а нема ни једно решење за $b \leq 0$.

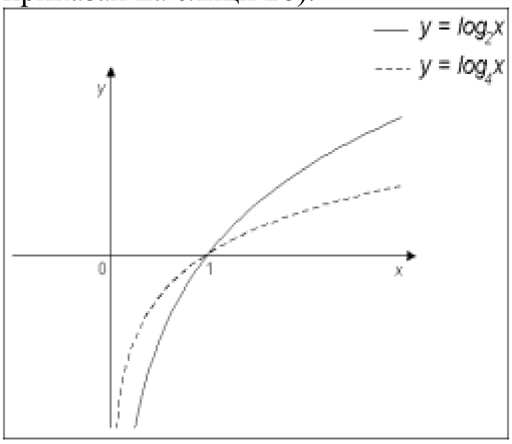
Ако је $a > 0$ и $a \neq 1$, јединствено решење једеначине (1) назива се **логаритам** броја b за основу a и означава се $\log_a b$. Дакле, под наведеним условима имамо

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

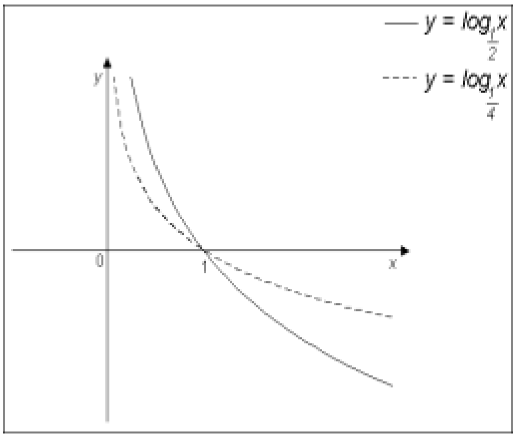
3.3. График логаритамске функције

Логаритамска функција $f(x) = \log_a x$, где је $a > 0$ и $a \neq 1$, пресликава реалан број x у реалан број $\log_a x$.

Ако је $a > 1$ график је приказан на слици 2а), а ако је $0 < a < 1$ график је приказан на слици 2б).



Слика 2а)



Слика 2б)

3.4. Основне особине логаритамске функције

За свако $a > 0$ и $a \neq 1$, важи:

$i) \quad \log_a 1 = 0;$

$ii) \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y;$

$iii)\ \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$

$iv)\ \log_a x^r = r \cdot \log_a x,\ \ (r \in R);$

$v)\ x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2;$

$vi)$ а) Ако је $0 < a < 1$ логаритамска функција је опадајућа и важи

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2;$

б) Ако је $a > 1$ логаритамска функција је растућа и важи

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$

Задаци за вежбу

1.Решити следеће једначине:

а) $5^x + 3\cdot 5^{x-2} = 140;$ б) $7\cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3};$ ц) $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x;$

д) $6\cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13\cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6\cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0;$ е) $3^{4x+8} - 4\cdot 3^{2x+5} + 27 = 0;$ ф) $18^x + 12^x = 2\cdot 8^x;$

г) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}};$ х) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15.$

2. а) Ако је $\log_{ab} a = n,$ израчунати $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}};$

б) Ако је $\log_a x = p, \log_b x = q, \log_{abc} x = r,$ израчунати $\log_c x;$

ц) Ако је $\log_{12} 18 = a, \log_{24} 54 = b,$ израчунати $ab + 5(a-b);$

д) Ако је $\log_6 2 = a, \log_6 5 = b,$ израчунати $\log_3 5.$

3. Решити следеће једначине:

а) $\log x - \log \dfrac{1}{x-1} - \log 2 = 0;$ б) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7;$

ц) $\log\sqrt{x-8} + \dfrac{1}{2}\log(2x+1) = 1;$ д) $\log_2 \dfrac{x-7}{x-1} + \log_2 \dfrac{x-1}{x+1} = 1;$

е) $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4;$ ф) $9^{1+\log x} + 3^{1+\log x} = 210.$

4. Решити неједначине:

а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \dfrac{x+1}{x-1}\right) \geq 0;$ б) $\log_{0,3}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right) < 0;$ ц) $\log_3(1-x) < \log_{\frac{1}{3}}(x+2);$

д) $\log_5 x \geq \log_{25}(3x-2);$ е) $\log_{x-3}(x^2-4x+3) < 0;$ ф) $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1.$

5. Решити неједначине

а) $2^{x+2} > \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}};$ б) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1;$ ц) $4^{1-x^2} + 2^{2-x^2} > 3;$

д) $9\cdot 16^x + 4\cdot 81^x < 13\cdot 36^x;$ е) $8\cdot 3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x}+1} \geq 9^{\sqrt{x}};$ ф)

$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^3.$

Упутства и решења

1.а) Како је $5^{x-2} = 5^x \cdot 5^{-2} = \dfrac{1}{25}5^x,$ можемо писати

$$5^x + \frac{3}{25}5^x = 140, \text{ односно } \frac{28}{25}5^x = 140 \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

б) Имамо: $3^{x+1}=3\cdot 3^x$, $5^{x+2}=9\cdot 5^x$, $3^{x+4}=81\cdot 3^x$, $5^{x+3}=125\cdot 5^x$, заменом у једначину добијамо

$$21\cdot 3^x-25\cdot 5^x=81\cdot 3^x-125\cdot 5^x \Leftrightarrow 100\cdot 5^x=60\cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x=\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=-1.$$

ц) Увођењем смена $a=2^x, b=3^x, c=5^x$, једначина постаје

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$$

Множењем са 2 и пребацивањем на исту страну добијамо

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0\Leftrightarrow a-b=0\wedge a-c=0\wedge b-c=0.$$

Из $2^x=3^x\Leftrightarrow x=0,\ 2^x=5^x\Leftrightarrow x=0,\ 3^x=5^x\Leftrightarrow x=0,$ закључујемо $x=0.$

д) После смене $y=\dfrac{1}{x}$ и дељења целе једначине са 6^y, добијамо

$$6\cdot\left(\frac{9}{6}\right)^y-13+6\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^y=0\Leftrightarrow 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^y-13+6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^y=0\,.$$

Опет уведемо смену $z=\left(\dfrac{3}{2}\right)^y$ добијамо

$$6z-13+6\cdot\frac{1}{z}=0\Leftrightarrow 6z^2-13z+6=0\Leftrightarrow z_1=\frac{3}{2},\ z_2=\frac{2}{3}.$$

Налазимо: $z=\left(\dfrac{3}{2}\right)^y\Leftrightarrow y_1=1, y_2=-1$. Коначно $y=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x_1=1, x_2=-1.$

е) Увођењем смене $y=3^{2x+4}$, имамо да је: $3^{4x+8}=y^2,\ \ 3^{2x+5}=3\cdot 3^{2x+4}=3y,$ па једначина постаје

$$y^2-12y+27=0\Leftrightarrow y_1=3, y_2=9.$$

Сада решавамо смене: $3^{2x+4}=3\Leftrightarrow 2x+4=1\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2};\ \ 3^{2x+4}=9\Leftrightarrow 2x+4=2\Leftrightarrow x=-1.$

ф) Поделимо једначину са 12^x добијамо

$$\left(\frac{18}{12}\right)^x+1=2\left(\frac{8}{12}\right)^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+1=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

Уведимо смену $y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, добијамо

$$y^2+1=\frac{2}{y}\Leftrightarrow y^3+y-2=0.$$

Може се приметити да је једно решење $y_1=1,$ па дељењем последње кубне једначине са $y-1$ добијамо квадратну једначину $y^2+y+2=0,$ која нема реалних решења. Отуда налазимо да је једино решење $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0.$

г) Увођењем смене $y=2^{\sqrt{x-2}}$, добијамо једначину

$$y^2+16=10y\Leftrightarrow y^2-10y+16=0\Leftrightarrow y_1=2,\ y_2=8.$$

Решавањем смена добијамо

$$2^{\sqrt{x-2}}=2\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=1\Leftrightarrow x-2=1\Leftrightarrow x_1=3;$$

$$2^{\sqrt{x-2}}=2^3\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=3\Leftrightarrow x-2=9\Leftrightarrow x_2=11.$$

х) Како је $2^{2+x}=2^2\cdot 2^x=4\cdot 2^x,\ \ 2^{2-x}=2^2\cdot 2^{-x}=\dfrac{4}{2^x}$, то увођењем смене $y=2^x$, добијамо једначину

$$4y-\frac{4}{y}=15 \Leftrightarrow 4y^2-15y-4=0 \Leftrightarrow y_1=-\frac{1}{4},\ y_2=4.$$

Решавањем смене налазимо

$2^x=-\frac{1}{4}$, нема решења,

$2^x=4 \Leftrightarrow x=2,$ једино решење дате једначине.

2. а) Пођимо од следећих једнакости

$$\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\log_{ab}\sqrt[3]{a}-\log_{ab}\sqrt{b}=\frac{1}{3}\log_{ab}a-\frac{1}{2}\log_{ab}b.$$

$$1=\log_{ab}ab=\log_{ab}a+\log_{ab}b \Rightarrow \log_{ab}b=1-\log_{ab}a.$$

Сада налазимо да је

$$\log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}=\frac{1}{3}n-\frac{1}{2}(1-n)=\frac{5n-3}{6}.$$

б) Треба искористити једнакост $\log_b a\cdot\log_a b=1,$ односно $\log_b a=\frac{1}{\log_b a}$. Зато важе следеће једнакости

$$r=\log_{abc}x=\frac{1}{\log_x abc}=\frac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}=\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{\log_c x}}.$$

Сада налазимо да је

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{\log_c x}=\frac{1}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_c x}=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \Leftrightarrow \log_c x=\frac{pqr}{pq-pr-qr}.$$

ц) Искористимо једнакост $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$, узимајући да је $c=3$ налазимо

$$a=\log_{12}18=\frac{\log_3 2\cdot 9}{\log_3 2^2\cdot 3}=\frac{\log_3 2+\log_3 9}{\log_3 2^2+\log_3 3}=\frac{\log_3 2+2}{2\log_3 2+1},$$

$$b=\log_{24}54=\frac{\log_3 2\cdot 27}{\log_3 2^3\cdot 3}=\frac{\log_3 2+3}{\log_3 2^3+1}=\frac{\log_3 2+3}{3\log_3 2+1}.$$

Ако искористимо краћи запис, увођењем $y=\log_3 2$, имамо даље да је

$$ab+5(a-b)=\frac{y+2}{2y+1}\cdot\frac{y+3}{3y+1}-5\left(\frac{y+2}{2y+1}-\frac{y+3}{3y+1}\right).$$

Израчунамо прво израз у загради. Имамо

$$\frac{y+2}{2y+1}-\frac{y+3}{3y+1}=\frac{(y+2)(3y+1)-(y+3)(2y+1)}{(2y+1)(3y+1)}=\frac{y^2-2y-1}{(2y+1)(3y+1)}.$$

Коначно добијамо

$$ab+5(a-b)=\frac{y^2+5y+6}{(2y+1)(3y+1)}+5\frac{y^2-2y-1}{(2y+1)(3y+1)}=\frac{6y^2+5y+1}{(2y+1)(3y+1)}=1.$$

д) Приметимо да је $\log_3 5=\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$. Сада је

$$\log_6 2=a \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\log_2 6 \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\log_2 3+\log_3 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\log_2 3+1 \Leftrightarrow \log_2 3=\frac{1-a}{a}.$$

$$\log_6 5=b \Leftrightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 6}=\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{\log_2 5}{\log_2 3+\log_2 2}=\frac{1}{b} \Leftrightarrow \log_2 5=\frac{\log_2 3+1}{b} \Leftrightarrow \log_2 5=\frac{1}{ab}.$$

Отуда следи да је

$$\log_3 5=\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=\frac{1-a}{b}.$$

3. Логаритамске једначине је најлакше решавати трансформацијама који нису нужно обавезне да буду еквивалентне. Због тога је **провера добијених решења обавезна**.

а) Искористићемо особине логаритма

$$\log x-\log\frac{1}{x-1}-\log 2=0\Rightarrow\log\frac{x}{\frac{1}{x-1}}-\log 2=0\Rightarrow\log\frac{x\cdot|x-1|}{2}=0\Rightarrow\frac{x(x-1)}{2}=1.$$

Добијена једначина је квадратна и решења су $x_1=-1,\ x_2=2.$ Провером се уверавамо да једначина има јединствено решење $x=2,$ јер за оно друго прва два логаритма нису дефинисана, тј. подлогаритамска величина им је негативна.

б) Искористимо да је $\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\log_a b,$ па имамо: $\log_{16} x=\frac{1}{4}\log_2 x;\ \ \log_4 x=\frac{1}{2}\log_2 x;$ заменом у једначину добијамо

$$\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7\Leftrightarrow\frac{7}{4}\log_2 x=7\Leftrightarrow\log_2 x=4\Leftrightarrow x=16.$$

Провером се уверавамо да је добијено решење заиста и решење полазне једначине.

ц) Искористимо особине логаритма

$$\log\sqrt{x-8}+\frac{1}{2}\log(2x+1)=1\Rightarrow\log\sqrt{x-8}+\log\sqrt{2x+1}=1\Rightarrow\log\sqrt{(x-8(2x+1))}=1\Rightarrow\sqrt{(x-8(2x+1))}=10.$$

После квадрирања добија се квадратна једначина чија су решења: $x_1=12, x_2=-\frac{9}{2}.$

Провером се уверавамо да је једино решење $x=12,$ јер у другом случају добијамо негативну величину под логаритмом.

д) На основу особина логаритма имамо

$$\log_2\frac{x-7}{x-1}+\log_2\frac{x-1}{x+1}=1\Rightarrow\log\frac{x-7}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+1}=1\Rightarrow\log\frac{x-7}{x+1}=1\Rightarrow\frac{x-7}{x+1}=10\Leftrightarrow x=-\frac{17}{9}.$$

Провером утврђујемо да добијени кандидат јесте решење полазне једначине.

е) По особинама логаритма је:

$$\log_{0,2}(x-2)=\log_{\frac{1}{5}}(x-2)=-\log(x-2).$$

Сада једначина постаје

$$\log_5(x-2)+\log_{\sqrt{5}}\left(x^3-2\right)-\log_5(x-2)=4\Rightarrow\log_{\sqrt{5}}\left(x^3-2\right)=4\Leftrightarrow x^3-2=25\Leftrightarrow x=3.$$

Провером се уверавамо да $x=3$ јесте решење полазне једначине.

ф) Ако се уведе смена $y=3^{\log x}$, једначина постаје

$$9\cdot y^2+3y-210=0,$$

чија су решења: $y_1=-5,\ y_2=\frac{14}{3}.$ Решавање смене је могуће само за другу вредност одакле се добија $3^{\log x}=\frac{14}{3}\Leftrightarrow\log x=\log_3\frac{14}{3}\Leftrightarrow x=10^{\log_3\frac{14}{3}}.$

4. а) На основу знака логаритамске функције за основу 0,3 закључујемо да је

$$0<\log_3\frac{x+1}{x-1}\le 1\ \text{ односно }\ \log_3 1<\log_3\frac{x+1}{x-1}\le\log_3 3.$$

Логаритамска функција за основу 3 је монотоно растућа. Одатле следује

$$1<\frac{x+1}{x-1}\le 3.$$

Добијена неједначина се решава посебно за свако ограничење , а укупно решење је пресек оба добијена. Решење $x\in[2,\infty).$

б) Да би логаритам био дефинисан мора бити $\frac{x^2+x}{x+4}>0.$ Ово је неједначина знака чије је решење $x\in(-4,-1)\cup(0,\infty).$

Прва логаритамска функција је опадајућа одакле закључујемо да је

$$\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1.$$

Логаритамска функција за основу 6 је растућа, па следи

$$\frac{x^2+x}{x+4}>6\Leftrightarrow\frac{x^2-5x-24}{x+4}>0\Leftrightarrow\frac{(x-8)(x+3)}{x+4}>0.$$

Решење ове неједначине знака је $x\in(-4,-3)\cup(8,\infty).$ Укупно решење је пресек оба добијена, дакле, $x\in(-4,-3)\cup(8,\infty).$

ц) За дефинисаност логаритама мора да буде: $1-x>0$ и $x+2>0.$ решење је $x\in(-2,1).$

Како је

$$\log_3(1-x)=-\log_{\frac{1}{3}}(1-x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{1-x},$$

то добијамо

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{1-x}<\log_{\frac{1}{3}}(x+2).$$

Добијена логаритамска функција је опадајућа, па следи

$$\frac{1}{1-x}>x+2\Leftrightarrow\frac{1}{1-x}-(x+2)<0\Leftrightarrow\frac{x^2+x-1}{1-x}>0\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1.$$

Следи, укупно решење је $x\in(-2,1).$

д) За дефинисаност логаритма мора бити: $x>0\wedge 3x-2>0,$ дакле, $x\in\left(\frac{2}{3},\infty\right).$

Како је $\log_{25}(3x-2)=\log_5\sqrt{3x-2},$ и како је то растућа функција следује да је

$$\log_5 x\geq\log_{25}(3x-2)\Leftrightarrow x\geq\sqrt{3x-2}\Rightarrow x^2-3x+2\geq 0.$$

Квадратни трином је ненегативан за $x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty).$ Отуда је укупно решење $x\in\left(\frac{2}{3},1\right)\cup(2,\infty).$

е) За дефинисаност логаритма мора бити $x^2-5x+6>0\wedge x-3>0\wedge x-3\neq 1.$ Решење овог система је $x\in(3,4)\cup(4,\infty).$

Сада разликујемо два случаја

¡) За $x\in(3,4)$, дата функција је опадајућа па мора бити

$$x^2-4x+3>1\Leftrightarrow x^2-4x+2>0.$$

Добијени квадратни трином је позитиван за $x\in\left(-\infty,2-\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3},\infty\right),$ што заједно са претпостављеном облашћу даје решење $x\in\left(2+\sqrt{3},4\right).$

¡¡) За $x\in(4,\infty)$ дата функција је растућа па мора бити

$$x^2-4x+3<1\Leftrightarrow x^2-4x+2<0.$$

Добијени квадратни трином је негативан за $x\in\left(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right),$ што у пресеку са претпостављеном облашћу не даје решење.

Укупно решење је: $x\in\left(2+\sqrt{3},4\right).$

ф) За дефинисаност логаритма мора бити: $x^2-5x+6>0\wedge 2x>0\wedge 2x\neq 1,$ што даје област у којој треба потражити решење дату са $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)\cup(3,\infty).$

Сада разликујемо два случаја

¡) За $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ посматрана функција је опадајућа па мора бити

$$x^2-5x+6>2x\Leftrightarrow x^2-7x+6>0.$$

Добијени квадратни трином је позитиван за $x\in(-\infty,1)\cup(6,\infty).$ Пресек са претпостављеном облашћу даје решење $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$

¡¡) За $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)\cup(3,\infty)$ посматрана функција је растућа па следи да је

$$x^2-5x+6<2x\Leftrightarrow x^2-7x+6<0.$$

Добијени квадратни трином је негативан за $x\in(1,6),$ што у пресеку са претпостављеном облашћу даје решење $x\in(1,2)\cup(3,6).$

Дакле, укупно решење је: $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)\cup(3,6).$

5. а) Како је $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(2^{-2}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{-\frac{2}{x}}$, и како је функција 2^x растућа следује да је

$$2^{x+2}>2^{-\frac{2}{x}}\Leftrightarrow x+2>-\frac{2}{x}\Leftrightarrow\frac{2}{x}+x+2>0\Leftrightarrow\frac{x^2+2x+2}{x}>0\Leftrightarrow x>0.$$

б) Како је $\left(\frac{3}{7}\right)^x$ опадајућа функција и $\left(\frac{3}{7}\right)^0=1$, то следује да је

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^{2^2}}}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x^2-2x}{x^2}\leq 0\Leftrightarrow\frac{x-2}{x}\leq 0.$$

Решење ове неједначине је $x\in(0,2].$

ц) Увођењем смене $y=2^{-x^2}$, и како је $4^{1-x^2}=4\cdot 4^{-x^2}=4\cdot 2^{-2x^2}$, и $2^{2-x^2}=2^2\cdot 2^{-x^2}=4\cdot 2^{-x^2}$ добијамо

$$4y^2+4y-3>0.$$

Добијени квадратни трином је позитиван за $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right).$ Уведена смена је опадајућа увек позитивна функција и мора бити

$$2^{-x^2}>\frac{1}{2}=2^{-1}.$$

Одавде добијамо $-x^2>-1\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow x\in(-1,1).$ С обзиром на већ добијено ограничење укупно решење је: $x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right).$

д) Поделимо целу неједначину са 36^x добијамо после скраћивања

$$9\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x+4\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^x<13.$$

Увођењем смене $y=\left(\frac{4}{9}\right)^x$ добијамо неједначину

$$9y+\frac{4}{y}-13<0 \Leftrightarrow \frac{9y^2-13y+4}{y}<0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(9y-4)}{y}<0.$$

Добијена неједначина знака има решење за $y \in (-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{9},1\right)$.

Како је уведена смена увек позитивна мора бити $\frac{4}{9}<\left(\frac{4}{9}\right)^x<1 \Leftrightarrow x\in(0,1)$.

е) Због дефинисаности корена мора бити $x\in[0,\infty)$.

Поделимо целу једначину са $9^{\sqrt{x}}=3^{2\sqrt{x}}$, добијамо

$$8\cdot 3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}+9\cdot 9^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}\geq 1.$$

Уведимо сада смену $y=3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}$ добијамо неједначину

$$8y+9y^2-1\geq 0 \Leftrightarrow (y+1)(9y-1)\geq 0,$$

чије је решење $y\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{9},\infty\right)$.

Како је смена увек позитивна , а експонент је негативан јер је $\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}<0$ у дозвољеној области за x, па је степена функција опадајућа. тако добијамо

$$3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}>\frac{1}{9}\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-\sqrt{x}>-2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x}\geq x+4 \Rightarrow x^2-17x+16\leq 0.$$

Ова неједнакост је испуњена за $x\in[1,16]$. Коначно решење $x\in[1,16]$.

ф) Разликујемо два случаја

¡) За $x^2+x+1>1\Leftrightarrow x(x+1)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, посматрана основа је таква да је степена функција растућа одакле закључујемо да је

$$\frac{x+5}{x+2}>3\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2}<0\Leftrightarrow x\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right).$$

Пресек са посматраном облашћу даје решење $x\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

¡¡) За $x\in(0,1)$ степена функција је опадајућа одакле следи да је

$$\frac{x+5}{x+2}<3\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2}>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right),$$

што у пресеку са посматраном облашћу даје решење $x\in(0,1)$.

Укупно решење је $x\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,1)$.

4. Тригонометрија

4.1. Дефиниције

Тригонометријске функције оштрог угла могу се дефинисати у правоуглом троугу на следећи начин:

$$\sin\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}};\quad \cos\alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}};\quad tg\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}}.$$

Нека је Oxy Декартов правоугли координатни систем у равни и нека је P тачка те равни која се налази на кружници са центром у координатном почетку и полупречником 1. Ако је угао $\measuredangle xOP = \alpha$, мерен у правцу супротном од кретања казаљке на сату, тада се координате тачке P дефинишу као $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Дакле,

$$P(\sin\alpha,\ \cos\alpha).$$

Уводимо и следеће дефиниције:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Из дефиниције функција синус и косинус директно следи основна тригонометријска идентичност

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

4.2. Основна таблица

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

4.3. Периодичност, комплементарни углови

За сваки цео број k важи:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha,\quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\quad tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha.$$

Тачне су и следеће формуле:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,\quad tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha.$$

4.4. Углови већи од $\frac{\pi}{2}$

Из дефиниције тригонометријских функција следује:

$i)$ Ако α припада првом квадранту тада су $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha$ позитивни;
$ii)$ Ако α припада другом квадранту тада је $\sin\alpha$ позитиван, а $\cos\alpha,\ tg\alpha$ су негативни;
$iii)$ Ако α припада трећем квадранту тада је $tg\alpha$ позитиван, а $\sin\alpha,\ \cos\alpha$ су негативни;
$iv)$ Ако α припада четвртом квадранту тада је $\cos\alpha$ позитиван, а $\sin\alpha,\ tg\alpha$ су негативни;

Према томе, да би се израчунао, рецимо синус неког угла, треба одредити синус оштрог угла који дуж OP заклапа са $x-$осом, а знак се одређује на основу горњих правила.

4.5. Адиционе формуле

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \qquad \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$
$$tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy} \qquad tg(x-y)=\frac{tgx-tgy}{1+tgxtgy}$$

4.6. Формуле за двоструке и половине угла

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{2tgx}{1+tg^2x} \qquad \sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} \qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$
$$tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x} \qquad tg^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

4.7. Трансформације збира и производа

$$\sin x+\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right) \qquad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$$
$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y)-\sin(x-y)\right) \qquad \sin x\sin y=-\frac{1}{2}\left(\cos(x+y)-\cos(x-y)\right)$$

4.8. Синусна и косинусна теорема

Синусна и косинусна теорема омогућавају да се израчунају непознати углови и странице троугла ако су три од њих познати.

Ако су a,b,c странице , а α,β,γ углови неког троугла (R полупречник описаног круга) важи следећа теорема која се назива синусна

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

важи и косинусна теорема

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$b^2 = c^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Ако су дате странице углови се рачунају косинусном теоремом. Ако су дате две странице и захваћен угао примењује се синусна теорема итд.

4.9. Тригонометријске једначине

Тригонометријске једначине се решавају тако што се своде на основне једначине. Основне тригонометријске једначине су: $\sin x = a$; $\cos x = b$; и $tgx = c$. Њих решавамо на следећи начин:

$i)$ Нека је дата једначина

(1) $\sin x = a$.

Ако је $|a| > 1$, једначина (1) нема решења;

Ако је $|a| \le 1$, једначина (1) има једно и само једно решење за које важи $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. То јединствено решење се означава са $x = \arcsin a$.

Дакле, за $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ и $|a| \le 1$, важи следећа еквиваленција

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = \arcsin a.$$

Сва решења једначине (1) дате су формулама:

$$x = 2k\pi + \arcsin a, \quad x = (2k+1)\pi - \arcsin a, \quad k \in Z.$$

$ii)$ Нека је дата једначина

(2) $\cos x = a$.

Ако је $|a| > 1$, једначина (2) нема решења;

Ако је $|a| \le 1$, једначина (2) има једно и само једно решење за које важи $0 \le x \le \pi$. То јединствено решење се означава са $x = \arccos a$.

Дакле, за $0 \le x \le \pi$ и $|a| \le 1$, важи следећа еквиваленција

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \arccos a.$$

Сва решења једначине (2) дате су формулама:

$$x = 2k\pi + \arccos a, \quad x = 2k\pi - \arccos a, \quad k \in Z.$$

$iii)$ Нека је дата једначина

(3) $tgx = a.$.

Једначина (3) има решење за свако $a \in R$. Једначина (3) има једно и само једно решење које задовољава услов $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. То решење означавамо са $x = arctga$.

Сва решења једначине (3) дата су формулом

$$x = k\pi + arctga, \ k \in Z.$$

Решити следеће задатке

1.Ако је $tgx = 3$ израчунати $\frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{4\sin 2x + 5\cos 2x}$.

2. Ако је $3\sin x + 4\cos x = 5,$ одредити $\sin x, \cos x.$

3. Ако је $tgx + ctgx = p,$ одредити $tg^2 x + ctg^2 x.$

4. Одредити вредности осталих тригонометријских функција ако је:

а) $\sin x = -\frac{1}{3}$ и $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

б) $tgx = 2 - \sqrt{3}$;

ц) $\sin 2x = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

5. Показати да је: $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; $\cos^3 x = \frac{\cos 3x - 3\cos x}{4}$.

6. а) Одреди $\cos\frac{x}{2}$, ако је $\sin x = \frac{4}{5}$ и $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right)$.

б) Одреди $\cos x,$ ако је $\sin 2x = \frac{7}{9},$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ц) Знајући да је $tgx = 2 - \sqrt{3},$ израчунати $\sin 2x,$ $\cos\frac{x}{2}$.

7. Показати да је:

а) $\sin^2 x \cos x = \frac{1}{4}(\cos x - \cos 3x)$; б) $\sin^3 x \cos x = \frac{1}{8}(2\sin 2x - \sin 4x)$.

8. Решити једначине:

а) $\cos x = \cos 3x$; б) $2 + \cos 4x = 2\sin^2 x$; ц) $\sin 3x + \cos 2x = 1$;

д) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$; *е*) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$; ф) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$;

г) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$; х) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

9. Решити троугао без употребе дигитрона

а) $a = 2\sqrt{2}, \alpha = 45^0, \beta = 120^0$; б) $a = 3 + \sqrt{3}, b = 3\sqrt{2}, \alpha = 75^0$;

ц) $a = \sqrt{6}, b = 2\sqrt{3}, c = 3 - \sqrt{3}$; д) $\alpha = 30^0, a = \sqrt{2}, b = 2.$

10. Доказати идентитете

а) $\sin 3x \cdot \cos^3 x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}\sin 4x$; б) $\frac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x} = tg3x$;

ц) $\frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + \cos 2x} = 2\cos x$; д) $\frac{\sin x - 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x - 2\cos 2x + \cos 3x} = tg2x.$

11. Ако су α, β оштри углови и ако је $tg\alpha = \frac{1}{2},$ $tg\beta = \frac{1}{3}$ показати да је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

12. Доказати идентитете

а) $\dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)} - \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{-1}{\cos 2x};$

б) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) ctg\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cos(-x)}{\cos(2\pi + x) tg(\pi - x)} = -\sin x.$

Упутства и решења

1.По формули је $tg2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x} = \dfrac{6}{1-9} = -\dfrac{3}{4}.$ Ако поделимо и именилац и бројилац датог разломка са $\cos 2x,$ добијамо

$$\frac{2\sin 2x - 3\cos 2x}{4\sin 2x + 5\cos 2x} = \frac{2tg2x - 3}{4tg2x + 5} = -\frac{9}{4}.$$

2. Увек важи основна тригонометријска идентичност $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$ што заједно са датом релацијом чини систем две једначине са две непознате. Систем решавамо методом замене. Из друге једначине је $\sin x = \dfrac{5 - 4\cos x}{3}$, па заменом у идентитет добијамо $\left(\dfrac{5 - 4\cos x}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1.$ Добијамо

$25\cos^2 x - 40\cos x + 16 = 0 \Leftrightarrow (5\cos x - 4)^2 = 0.$

Одавде следи да је $\cos x = \dfrac{4}{5},$ па је $\sin x = \dfrac{3}{5}.$

3. Како је $tgx \cdot ctgx = 1,$ то квадрирањем полазне једнакости добијамо

$$(tgx + ctgx)^2 = p^2 \Leftrightarrow tg^2 x + 2 + ctg^2 x = p^2 \Leftrightarrow tg^2 x + ctg^2 x = p^2 - 2.$$

4. а) Из $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$ налазимо да је $\cos^2 x = \dfrac{8}{9}.$ Како је x угао у трећем квадранту за њега је $\cos x$ негативан, дакле, $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$ Даље је: $\sin x = -\dfrac{1}{3},$

$tgx = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

б) Како је $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x},$ следи $\sin x = \left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x.$ Увек важи $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$ па заменом добијамо $\cos^2 x = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}.$ Одавде је $\cos x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}},$ $\sin x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$

ц) Из формуле $\sin 2x = 2\sin x \cos x,$ налазимо да је $\sin x = \dfrac{3}{10 \cdot \cos x}$. Заменом у $\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$ добијамо биквадратну једначину $\dfrac{9}{100\cos^2 x} + \cos^2 x = 1,$ коју сменом $y = \cos^2 x,$ претварамо у квадратну једначину чија су решења: $\cos^2 x = \dfrac{1}{10}$

и $\cos^2 x = \frac{9}{10}$. Постоје два решења с обзиром да је угао у другом квадранту где је $\cos x$ негативан. Дакле, $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ или $\cos x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

5. Имамо: $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x =$
$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$

Потпуно аналогно је $\cos 3x = 4\cos^3 x + 3\sin x.$

6. По претпоставци дати угао је у другом квадранту, а његова половина је у трећем, с обзиром на негативну оријентацију, па је $\cos\frac{x}{2}$ негативан, а такође и $\cos x$.

Из $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, налазимо $\cos x = -\frac{3}{5}$. По формули је. Дакле, $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

б) У првом квадранту су обе функције позитивне. Из $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$, налазимо да је $\cos 2x = \frac{\sqrt{32}}{9}$. Имамо да је $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{9 + \sqrt{32}}{18}$.

ц) Из $\frac{\sin x}{\cos x} = 2 - \sqrt{3}$, налазимо $\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Из формуле $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, налазимо да је $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Такође из $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$, налазимо $\cos\frac{x}{2}$, итд.

7. а) Користимо формуле претварања производа у збир

$$\sin x \cdot (\sin x \cos x) = \sin x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2x \sin x = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}(\cos(2x + x) - \cos(2x - x)) = \frac{1}{4}(\cos x - \cos 3x).$$

б) Слично као под а)

8. а) $\cos x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{5x}{2} = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = 0.$

Решења: $x_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{5}, \quad x_2 = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z.$

б) $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, па добијамо једначину

$$2\cos^2 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Решења су: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z.$

ц) Како је $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ добијамо једначину

$$3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}\right)\left(\sin x - \frac{-1 - \sqrt{13}}{4}\right) = 0$$

Решења су: $x_1 = k\pi, \quad x_2 = arcin\frac{\sqrt{13} - 1}{4} + 2k\pi, \; x_2 = arcin\frac{\sqrt{13} - 1}{4} + (2k + 1)\pi.$ Трећа нема решење

д) Применом адиционих формула добијамо

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos x + 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\cos x(\sin 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cdot 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin\frac{5x}{2} = 0 \vee \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Решења: $x = k\pi, \quad x_2 = \frac{2}{5}k\pi$, $x_3 = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z.$

е) $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$, добијамо

$$2\cos^2 x+2\cos 2x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos 2x=-\frac{1}{2}.$$

Решења су: $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{3}+k\pi,\quad x_3=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z.$

ф) Ако поделимо са 2 и искористимо да је $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$ добијамо

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1$$

Решење је: $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$

г) $\sin x+\cos x=1+\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x-\sin x\cos-(1-\cos x)=0 \Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin x-1)=0$

Дакле, $\sin x=1\vee\cos x=1.$ Решења су: $x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ x_2=2k\pi,\ k\in Z.$

х) Сменом $y=\sin x$ добијамо квадратну једначину $2y^2+y-1=0,$ чија су решења $y_1=-1,\ y_2=\frac{1}{2}.$ Решавањем једначина $\sin x=-1$ и $\sin x=\frac{1}{2}$ добијамо $x_1=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,$ $x_2=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x_3=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z.$

9. а) Применом синусне теореме добијамо $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Leftrightarrow b=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a=\frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=2.$

Из $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ следи $\gamma=15^0.$ Косинусном теоремом добијамо трећу страницу $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$ $\cos^2 15^0=\frac{1+\cos 30^0}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4},\ \cos 15^0=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}.$ итд.

б) Прво налазимо $\sin 75^0.$ Имамо

$$\sin 75^0=\sin\left(30^0+45^0\right)=\sin 30^0 cod 45^0+\cos 30^0\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Сада синусном теоремом имамо $\sin\alpha=\frac{a}{b}\sin\beta$ итд.

ц) Применом косинусне теореме за угао добијамо

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{12+12-6\sqrt{3}-6}{4\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{18-6\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Налазимо да је $\alpha=\frac{\pi}{3},$ итд.

д) Синусном теоремом налазимо $\sin\beta=\frac{b}{a}\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{2}}\sin 30^0=\frac{\sqrt{2}}{2},$ итд.

10. а) (Видети задатак 5!) $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4};\quad \cos^3 x=\frac{\cos 3x-3\cos x}{4}.$ заменом добијамо

$$\sin 3x\frac{\cos 3x-3\cos x}{4}+\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\cos 3x=$$

$$\frac{1}{4}(\sin 3x\cos 3x-3\sin 3x\cos 3x+3\sin x\cos 3x-\sin 3x\cos 3x)=\frac{3}{4}\sin 4x.$$

б) $\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos x$ и $\cos 2x+\cos 4x=2\cos 3x\cos x$, па заменом добијамо

$$\frac{2\sin 3x\cos x-\sin 3x}{2\cos 3x\cos x-\cos 3x}=\frac{\sin 3x(2\cos x-1)}{\cos 3x(2\cos x-1)}=tg3x.$$

ц) $1+\cos 2x=2\cos^2 x$ и $\cos x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x$, па заменом добијамо

$$\frac{2\cos^2 x+2\cos 2x\cos x}{\cos x+\cos 2x}=\frac{2\cos x(\cos x+\cos 2x)}{\cos x+\cos 2x}=2\cos x.$$

д) $\sin x+\sin 3x=2\sin 2x\cos x$ и $\cos x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x$, па заменом добијамо

$$\frac{2\sin 2x\cos x-2\sin 2x}{2\cos 2x\cos x-2\cos 2x}=\frac{2\sin 2x(\cos x-1)}{2\cos 2x(\cos x-1)}=tg2x.$$

11. Како је

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

Одавде следи да је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

12. а) Имамо да је $\sin(\pi-x)=\sin x,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\ \cos(2\pi-x)=\cos x$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, добијамо

$$\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{\sin x(\cos x-\sin x)-\cos x(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{-1}{\cos 2x}.$$

б) Имамо да је $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x,\ ctg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-tgx,\ \cos(-x)=\cos x,\ \cos(2\pi+x)=\cos x$,

$tg(\pi-x)=-tgx,$ имамо

$$\frac{-\sin x\cdot(-tg(x))\cdot\cos x}{\cos x\cdot(-tgx)}=-\sin x.$$

5. Аналитичка геометрија

5.1. Растојање између две тачке и површина троугла

Нека су $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ две тачке. Растојање PQ између њих износи
$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$
Површина троугла одређеног са тачкама (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) дата је формулом
$$P = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$
узета као позитивна вредност добијене детерминанте.

5.2. Једначина праве линије

Једначина праве кроз дате тачке гласи
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$
Општи облик једначине праве гласи
$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 > 0.$$
Услов да мора бити $a^2 + b^2 > 0$, значи да не могу бити истовремено оба коефицијента уз непознате једнака нули.

5.3. Растојање између тачке и праве, угао између две праве

Растојање d између тачке $P(x_1, y_1)$ и праве $ax + by + c = 0$, износи
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Ако су дате праве $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ и $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, онда угао између њих срачунавамо по формули
$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$
где је $k_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$. Праве које се секу граде два угла која су међусобно суплементна. Онај други би се добио по формули $tg\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$.

5.4. Једначина круга

Једначина круга чији је центар у тачки (p, q) и чији је полупречник r гласи
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

5.5. Конусни пресеци

Нека је φ раван одређена неком правом d и тачком F ван ње. Нека је $e>0,$ произвољан реалан број. Означимо са M' управну пројекцију тачке M, равни φ, на праву d.

Скуп свих тачака у равни φ са особином

$$FM = e \cdot MM',$$

назива се конусним пресеком или кривом другог реда.

Ако је $e=1$, конусни пресек се назива парабола;

Ако је $e<1$, конусни пресек се назива елипса;

Ако је $e>1$, конусни пресек се назива хипербола.

Тачка F се назива жижа, права d, директриса , број $e>0,$ ексцентрицитет криве другог реда.

5.6. Парабола

Нека је $p>0$ произвољан реаланн број. Ако директриса има једначину $x=-\frac{p}{2}$, жижа је у тачки $\left(\frac{p}{2},0\right)$ тада једначина параболе гласи

$$y^2 = 2px.$$

5.7. Елипса

Нека је $a>0$ произвољан реалан број. Ако је директриса $x=\frac{a}{e},$ жижа је у тачки $F(ae,\ 0),$ $\left(e=\frac{c}{a}\right)$ једначина елипсе гласи

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где је $b^2=a^2\left(1-e^2\right),$ и $0<e<1$ произвољни ексцентрицитет.

5.8. Хипербола

Нека је $a>0$ произвољан реалан број. Ако је директриса $x=\frac{a}{e},$ жижа је у тачки $F(ae,\ 0),$ $\left(e=\frac{c}{a}\right)$ једначина хиперболе гласи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где је $b^2=a^2\left(e^2-1\right),$ и $e>1$ произвољни ексцентрицитет.

Како је хипербола на основу своје једначине симетрична у односу на обе координатне осе закључујемо да постоји још једна жижа $F_1(-ae,\ 0)$ и још једна директриса $x=-\frac{a}{e}.$

Праве дефинисане једначинама

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Leftrightarrow y=\frac{b}{a}x \vee y=-\frac{b}{a}x,$$

називају се асимптоте хиперболе.

5.9. Тангента на криву другог реда

Нека је тачка (x_0, y_0) произвољна тачка, а крива другог реда дата једначином

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

тада је једначина

$$Ax \cdot x_0 + B(x \cdot y_0 + x_0 \cdot y) + Cy \cdot y_0 + \frac{1}{2} D(x + x_0) + \frac{1}{2} E(y + y_0) + F = 0,$$

једначина тангенте ако тачка (x_0, y_0) припада кривој или једначина поларе ако јој не припада. Полара је права која сече криву другог реда у тачкама додира тангенти из тачке (x_0, y_0) на ту криву.

Решити следеће задатке

1.Одредити m тако да се праве: $4mx - (2m+1)y + 14 = 0$ и $(4m+5)x - (8m-1)y + 21 = 0$ секу на $y-$ оси. Израчунати затим површину троугла које образују дате праве и $x-$оса.
2. Наћи тачку која припада правој $x + y = 8$ и која је једнако удаљена од тачке $(2, 8)$ и праве $x - 3y + 2 = 0$.
3. Крајње тачке дужи су: $(-4, 1)$ и $(0, -1)$. Из које се тачке на симетрали ове дужи дата дуж види под правим углом?
4. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку $(-1, -1)$ а са правом $3x + 2y - 6 = 0$ образује угао β такав да је $tg\beta = \frac{1}{2}$.
5. Под којим углом се види круг $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 15 = 0$ из тачке $(1,2)$?
6. Одредити λ тако да права $x + y - 10 + \lambda \cdot (x - y) = 0,$ додирује круг $x^2 + y^2 = 5.$
7. Права $2x - y - 6 = 0$ је тангента параболе $x^2 = 2py.$ Наћи једначину параболе као и координате тачке додира.
8. Парабола садржи тачке пресека праве $x + y = 0$ и круга $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и симетрична је у односу на $x-$осу. Написати њену једначину и одреди једначине њене жиже и директрисе.
9. Наћи једначину тангенте параболе $y^2 = 8x$ која је паралелна правој $2x + 2y = 3.$
10. Наћи једначину тангенти конструисаних из тачке $(7, -2)$ на елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144.$
11. Кроз тачку $(-2,1)$ постави тетиву елипсе $4x^2 + 9y^2 = 36$ коју та тачка полови.
12. Написати једначину хиперболе чије су асимптоте $2y \pm x = 0$ а тангента је $5x - 6y = 8.$
13. Наћи једначину тангенте хиперболе $8x^2 - 16y^2 = -128$ паралелних са правом $2x + 4y - 5 = 0$ и израчунати растојање међу њима.
14. Наћи једначину хиперболе ако је растојање између жижа 6, а ексцентрицитет $\frac{3}{2}$
15. Одреди једначину кружнице која пролази кроз три тачке: $(1, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 4)$.

16. Наћи површину троугла ако је једначина странице $AB: y = 2x,$ једначина странице $AC: 2x + y + 8 = 0$ и једначина тежишне линије из темена C $2x - 7y + 24 = 0.$

17. Координате темена троугла су $(-1,-1),$ $(-3,5)$ и $(7,11)$. Одреди једначине: а) висина; б) тежишних линија; ц) симетрала страница. Затим, одреди ортоцентар, тежиште и центар описаног круга и докажи да се те три тачке налазе на једној правој.

Упутства и решења

1. Одсечак на $y-$ оси се види из експлицитног облика праве. У овом случају су то облици: $y = \frac{4m}{2m+1}x + \frac{14}{2m+1}$ и $y = \frac{4m+5}{8m-1}x + \frac{21}{8m-1}.$ Дакле, мора бити $\frac{14}{2m+1} = \frac{21}{8m-1},$ одакле је $m = \frac{1}{2}.$ Заменом у једначине оне постају: $y = x + 7$ и $y = \frac{7}{3}x + 7.$ Оне секу $x-$осу у тачкама: $(-7,0)$ и $(-3,0),$ а треће теме троугла је тачка $(0,7).$ По формули налазимо да је површина 14.

2. Све тачке које припадају датој правој имају облик $(k, 8-k).$ Растојање те тачке до тачке $(2,8)$ је $\sqrt{(2-k)^2 + k^2},$ а до дате праве $\frac{|k - 3(8-k) + 2|}{\sqrt{10}}.$ Изједначавањем ове две релације добијамо једначину која квадрирањем постаје квадратна, а чија су решења $k_1 = 3, k_2 = -37,$ што даје две тачке као могућа решења: $(3,5),$ $(-37,45).$

3. Симетрала дужи има особину да су све тачке подједнако удаљене од крајева те дужи. Ако тачке симетрале имају координате (x, y) онда мора да важи:

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2},$$

квадрирањем и срeђивањем добијамо једначину симетрале: $2x - y + 4 = 0.$
Тачке те праве имају координате $(k, 2k+4).$ Једначина праве кроз ту тачку и $(-4,1)$ гласи: $y - 1 = \frac{2k+3}{k+4}(x+4),$ а кроз ту тачку и тачку $(0,-1).$ гласи: $y + 1 = \frac{2k+5}{k}x.$
Коефицијенти праваца тих права су редом: $\frac{2k+3}{k+4}$ и $\frac{2k+5}{k}.$ Да би те праве биле управне мора бити $\frac{2k+3}{k+4} \cdot \frac{2k+5}{k} + 1 = 0,$ што даје решења: $k_1 = -1,$ $k_2 = -3.$ Постоје две такве тачке: $(-1,2)$ и $(-3,-2).$

4. Угао између две праве је дат формулом $tg\beta = \pm\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$ где су k_1, k_2 коефицијенти праваца тих права. Пошто је $k_2 = -\frac{3}{2}$ из ове формуле налазимо да је $k_1 = -\frac{4}{7}$ или $k_1 = -8.$ Из формуле прамена права кроз тачку $(-1,-1)$ налазимо тражене једначине права: $y + 1 = -\frac{4}{7}(x+1)$ и $y + 1 = -8(x+1).$

5. Из тачке $(1,2)$ поставимо полару на дати круг, једначина је $x + 2y + 4(x+1) + 3(y+2) - 15 = 0,$ односно $x + y - 1 = 0.$ Пресек те поларе и круга је решење система од те две једначине и даје: $(-2,3)$ и $(2,-1).$ Једначине права кроз

тачку $(1,2)$ и пресечне тачке са кругом су: $3x+y-5=0$ и $3y-x-5=0.$ Како је $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0,$ угао је прав.

6. Једначина дате праве је: $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y-10=0.$ Одавде је $x=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}y+10.$ Да би права била тангента круга систем једначина који чине једначине тангенте и круга мора имати јединствено решење. Методом смене се систем претвара у квадратну једначину

$$\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}y+\frac{10}{\lambda+1}\right)^2+y^2=5, \text{ односно } 2\left(\lambda^2+1\right)y^2+20(\lambda-1)y+95-5\lambda^2-10\lambda=0,$$

за коју мора бити дискриминанта једнака нули. Тако добијамо

$$400(\lambda-1)^2-8\left(\lambda^2+1\right)\left(95-5\lambda^2-10\lambda\right)=0, \text{ тј. } \lambda^4+2\lambda^3-8\lambda^2-18\lambda-9=0.$$

Цела решења добијене једначине су делиоци броја -9. Тако провером налазимо да је $\lambda_1=3$ и $\lambda_2=-3.$

7. Систем једначина састављен од једначина праве и параболе мора имати јединствено решење. Заменом из прве $x=\frac{y+6}{2}$ у другу добија се једначина: $y^2+(12-8p)y+36=0.$ За јединствено решење дискриминанта мора бити нула. Добијамо да је $p_1=0$ и $p_2=3,$ могуће је само $x^2=6y$ решење, а тачка додира $(6,6).$

8. Пресечне тачке су решење система који чине права и круг. Решење је $(0,0)$ и $(-2,2).$ Једначина параболе је $y^2=2px,$ па се налази $p=1$. Једначина је $y^2=2x.$ Жижа је $F\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{1}{2},0\right),$ директриса је $x=-\frac{1}{2}.$

9. Једначина те тангенте је: $y=kx+n.$ Из паралелности са правом налазимо да је $k=-1.$ Коефицијент n се добија тако да систем праве $y=-x+n.$ и параболе $y^2=8x$, има јединствено решење. Налазимо $n=-2.$ Решење: $y=-x-2.$

10. Нађемо једначину поларе за тачку $(7,-2)$ и налазимо $9\cdot 7x-16\cdot 2y=144.$ односно $63x-32y+144=0,$ $\left(y=\frac{63x-144}{32}\right)$. Пресек поларе и елипсе су тачке додира тражених тангенти. Налазимо решење система преко решења једначине $505x^2-2016x+1280=0.$ $x_1=\frac{80}{101}, x_2=\frac{1616}{505};$ па је $y_1=-\frac{297}{101}, y_2=\frac{9}{5}.$ Једначине тангенти су сада једначине права кроз две тачке: $y+x-5=0$ и $33y-5x+101=0.$

11. Прамен права кроз тачку $(-2,1)$ је $y-1=k(x+2).$ Једна од права тог прамена сече елипсу у тачкама чије је средиште тачка $(-2,1)$. Пресечне тачке су решење система једначина који чине прамен и елипса. Методом замене добијамо једначину

$$\left(4+9k^2\right)x^2+\left(36k^2+18k\right)x+36k^2+36k-27=0.$$

Ако су x_1, x_2 решења ове једначине онда је по претпоставци $\frac{x_1+x_2}{2}=-2,$ а по Виетовим формулама $x_1+x_2=-\frac{36k^2+18k}{2\left(4+9k^2\right)}.$ Лако налазимо $k=\frac{8}{9}$ и тражену једначине тетиве $9y-8x-25=0.$

12. Једначине асимптота су $y=\pm\frac{b}{a}x,$ па упоређујући са датим једначинама налазимо да је $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=2b.$

Ако је (x_0, y_0) тачка на хиперболи чија је једначина дата са $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$ онда је једначина тангенте у тој тачки дата са $b^2x\cdot x_0-a^2y\cdot y_0=a^2b^2.$ Упоређујући са датом једначином тангенте налазимо да је $b^2x_0=5k;\quad a^2y_0=6k,\ a^2b^2=8k.$ Одавде налазимо да је $x_0=\frac{5}{8}a^2$ и $y_0=\frac{3}{4}b^2.$ Заменом у једначину хиперболе добијамо $\frac{25}{64}a^2-\frac{9}{16}b^2=1$ што заједно са већ добијеном везом чини систем једначина чије решење даје тражену једначину. Решење: $\frac{x^2}{4}-y^2=1.$

13. Ако је једначина тангенте $y=kx+n,$ онда због паралелности са датом правом налазимо да је $k=-\frac{1}{2}.$ непознату n налазимо из услова да тангента и хипербола имају једну заједничку тачку, што значи да систем једначина који оне чине има јединствено решење. Дакле, $y=-\frac{1}{2}x+n$ и $8x^2-16y^2=-128$ сменом дају квадратну једначину $x^2+4xn+32-4n^2=0.$ Из услова да дискриминанта мора бити нула добијамо $n^2=4\Leftrightarrow n_1=-2\wedge n_2=2.$ Решење: $y=-\frac{1}{2}-2$ и $y=-\frac{1}{2}+2.$

14. Координате жижа су у $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0).$ Одавде је $2c=6\Leftrightarrow c=3.$ Код хиперболе је $c^2=a^2+b^2$ и $e=\frac{c}{a}.$ Следи, $c=\frac{3}{2}a\Leftrightarrow a=2,$ па је $b^2=5.$ Решење: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1.$

15. Ако је једначина тражене кружнице $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$ имамо три једначине са три непознате

$$\left.\begin{array}{l}(1-a)^2+(1-b)^2=r^2\\(4-a)^2+(2-b)^2=r^2\\(2-a)^2+(4-b)^2=r^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}a^2+b^2-2a-2b+2=r^2\\a^2+b^2-8a-4b+20=r^2\\a^2+b^2-4a-8b+20=r^2\end{array}\right\}.$$

Множењем прве једначине са -1 и додавањем осталим добијамо

$$\left.\begin{array}{l}-6a-2b+18=0\\-2a-6b+18=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow a=b=\frac{9}{4}.$$

Заменом у било коју полазну једначину добијамо $r^2=\frac{25}{8}.$

Решење: $\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{25}{8}.$

16. Пресек тежишне линије из темена C и странице AC даје теме C.

$$C:\left.\begin{array}{l}2x-7y+24=0\\2x+y+8=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow C(-5,2).$$

Пресек тежишне линије из темена C и странице AB даје средину основице AB.

$$C_1: \left.\begin{array}{l} 2x-7y+24=0 \\ y=2x \end{array}\right\} \Leftrightarrow C_1(2,4).$$

Пресек странице AB и странице AC даје координате темена А. Дакле,

$$A: \left.\begin{array}{l} y=2x \\ 2x+y+8=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A(-2,-4).$$

Ако су координате темена $B(a,b)$ и тачка C_1 њена средина налазимо из

$$\frac{a+(-2)}{2}=2,\ \frac{b+(-4)}{2}=4, \text{ односно } B(6,12).$$

По формули површина је $P=72.$

17. Нека су координате темена A, B и C, редом $(-1,-1)$, $(-3,5)$ и $(7,11)$.

Коефицијенти праваца права страница $AB,\ BC$ и CA су редом:

$$k_{AB}=\frac{5-(-1)}{-3-(-1)}=-3;\ k_{BC}=\frac{11-5}{7-(-3)}=\frac{3}{5};\ k_{CA}=\frac{11-(-1)}{7-(-1)}=\frac{3}{2}.$$

Прамен права кроз теме C је $y-11=k(x-7)$, па је висина из темена C одређена једначином $k=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{1}{3};\ h_C: y-11=\frac{1}{3}(x-7)$, односно $3y-x-26=0.$ Слично налазимо да је: $h_A: 3y+5x+8=0;\ h_B: 3y+2x-9=0.$ Ортоцентар је заједничка тачка свих висина, па је решење система од било које две висине. налазимо $H\left(\frac{-17}{3},\frac{61}{9}\right).$

Средине редом страница $AB,\ BC$ и CA су тачке: $C_1(-2,2)$, $A_1(2,8)$ и $B_1(3,5)$.

Једначине тежишних дужи су редом: $AA_1: y-3x-2=0,\ BB_1: y-5=0$ и $CC_1: y-x-4=0.$ Тежиште је њихов пресек и налазимо $T(1,5).$

Симетрала стране AB се добија из једначине: $\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}$, односно: $x-3y+8=0.$ Слично добијамо $S_{BC}: 5x+3y-34=0,\ S_{CA}: 2x+3y-21=0.$ Зато је центар описаног круга $O\left(\frac{13}{3},\frac{37}{9}\right).$

Да би тачке биле колинеарне довољно је да је површина троугла чија су она темена буде једнака нули. По формули налазимо

$$P(HTS)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{17}{3} & 1 & \frac{13}{3} \\ \frac{61}{9} & 5 & \frac{37}{9} \end{vmatrix}=0$$, иначе су у сваком троуглу ортоцентар, тежиште и центар описаног круга колинеарне тачке.

6. Површина и запремина геометријских тела

6.1 Површина и запремина полиедара

а) Призма. Полиедарска површ од $n+2,\ (n \geq 3)$ многоугла од којих су два подударна, а остали паралелограми назива се призма. Призме се именују бројем $n,$ као троугаоне, четвороугаоне, ... Специјално: а) када су све стране квадрати назива се коцка; б) када су све стране правоугаоници назива се квадар, ц) када су све стране паралелограми назива се паралелопипед. Подударне стране називају се основе, а остале чине омотач призме.

Ако са B означимо површину основе, са M површину омотача, а са H растојање између основа тада је

$$P = B + M, \qquad V = B \cdot H,$$

где су P, V редом површина и запремина призме.

б) Пирамида. Полиедарска површ од $n+3,\ (n \geq 1)$ многоугла од којих је једна $n-$то угаона, а све остале троугаоне назива се пирамида. Пирамиде се именују бројем $n,$ као троугаоне, четвороугаоне, ... Специјално када су све стране троугаоне назива се тетраедар.

Ако са B означимо површину основе, са M површину омотача и са H висину (растојање врха од основе) пирамиде, тада је

$$P = B + M, \qquad V = \frac{1}{3} B \cdot H,$$

где су P, V редом површина и запремина пирамиде.

ц) Зарубљена пирамида. Ако се паралелно са основом постави раван која сече све бочне ивице, па се одстрани горња новонастала пирамида оно што остане назива се зарубљена пирамида,

Ако са B означимо површину доње основе, са B_1 површину горње основе, са M површину омотача и са H растојање између основа тада је

$$P = B + B_1 + M, \ V = \frac{1}{3}\left(B + \sqrt{B \cdot B_1} + B_1\right) \cdot H,$$

где су P, V редом површина и запремина зарубљене пирамиде.

6.2. Обртна тела

а) Ваљак. Ако кружну цилиндричну површ пресечемо са две паралелне равни тело које настане назива се ваљак. Изводнице цилиндричне површи које припадају омотачу ваљка зову се изводнице ваљка. Растојање између основа ваљка назива се висина ваљка, а дуж која спаја средишта основа назива се оса ваљка. Ако је оса нормална на основу ваљка ваљак се назива прав, иначе је кос.

Ако са r означимо полупречник основе, а са H растојање између основа тада је

$$P = 2\pi r(r + H), \ V = r^2 \pi \cdot H,$$

где су P, V редом површина и запремина правог ваљка.

б) Купа. Ако се кружна конусна површ пресече са равни тако да је пресек круг онда тело које настане до врха конусне површи назива се купа. Купа је права ако висина из врха пада у центар основе, иначе је коса.

Ако са r означимо полупречник основе, са s дужину изводнице и са H висину (растојање врха од основе) купе, тада је

$$P = r\pi(r+s), \quad V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H,$$

где су P, V редом површина и запремина праве купе.

ц) Зарубљена купа. Ако се права купа пресече са равни паралелној основи добија се круг. Део купе између основе и тог круга назива се зарубљена купа.

Ако са r означимо полупречник доње основе, са r_1 полупречник горње основе, са s дужину изводнице и са H висину (растојање врха од основе) купе, тада је

$$P = r^2\pi + r_1{}^2\pi + (r+r_1)s\pi, \qquad V = \frac{1}{3}\left(r^2 + r \cdot r_1 + r_1{}^2\right)\pi \cdot H,$$

где су P, V редом површина и запремина праве зарубљене купе.

д) Сфера и лопта. Обртањем круга око осе која садржи његов пречник добија се обртна површ која се назива сфера, а тело се назива лопта.

Површина и запремина лопте дата је са

$$P = 4R^2\pi, \quad V = \frac{4}{3}R^3\pi,$$

где је $R,$ полупречник лопте.

Ако се лопта пресече са равни добијени одсечак назива се калота. Површина и запремина калоте чија је висина $h, (0 \le h \le R)$ дата је редом са

$$P = 2\pi Rh, \qquad V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Решити следеће задатке

1. Основа пирамиде је правоугаоник. Свака бочна ивица је дужине s и заклапа са ивицама основе углове α и $\beta.$ Израчунати површину и запремину пирамиде.
2. Израчунати површину и запремину правилног тетраедра ако је полупречник круга описаног око било које странице једнак $r.$
3. Висина троугаоне зарубљене пирамиде је 10. Странице једне основе су 27, 29 и 52, а обим друге основе је 72. Израчунати запремину зарубљене пирамиде.
4. Одредити површину и запремину правилне четворостране зарубљене пирамиде ако је њена дијагонала 18, а дужине страница основа 14 и 10.
5. У праву купу чија изводница има дужину 15 и чији је полупречник основе 9 уписана је лопта. Наћи запремину и површину лопте.
6. Око сфере је описана правилна тространа призма, а око те призме је описана сфера. Наћи односе површина и запремина тих сфера.
7. Наћи полупречник сфере описане око коцке странице $a.$ Потом израчунати њену површину и запремину.
8. Наћи полупречник сфере описане око правилне тростране пирамиде ако је дужина апотеме пирамиде a и ако апотема заклапа са равни основе угао $\beta.$
9. У правилном тетраедру уписана је и споља описана купа. Наћи односе површина и запремина тако насталих тела.
10. На ком растојању од врха купе, чија је висина $H,$ треба поставити раван паралелно основи која дели омотач купе на два дела једнаких површина?
11. Дужине полупречника основе зарубљене купе су 20 и 10. Изводница је нагнута према равни основе под углом од 45^0. Наћи површину и запремину зарубљене купе.

12. Правоугли троугао чије су катете 15 и 20 ротира око праве нормалне на хипотенузу која пролази кроз теме већег оштрог угла. Наћи површину и запремину тако добијеног тела.
13. У ваљак је уписана права призма која у основи има правоугли троугао са оштрим углом β. Висина основе призме која одговара хипотенузи једнака је висини призме и њена дужина је H. Израчунати површину и запремину ваљка.
14. Наћи површину и запремину ваљка описаног око квадра чије су ивице 3, 4 и 5.
15. Странице троугла су 13, 14 и 15. Наћи растојање равни троугла од центра лопте која додирује све ивице троугла ако је полупречник те лопте 5.

Упутства и решења

1. Нека је то пирамида $ABCDV$, где је $ABCD$ правоугаоник у основи. Како су све изводнице једнаке подножје висине из врха пада у центар описаног круга основе, у овом случају у пресек дијагонала правоугаоника. Нека је то тачка О. Троугао ABV је једнакокрак. Углови на основици су по претпоставци α, а краци дужине s. Нека је F средина ивице AB. Из правоуглог троугла AFV имамо да је бочна висина $FV = h_a = s \cdot \sin\alpha$, а основица $a = 2s \cdot \cos\alpha$. Слично, из једнакокраког троугла BCV налазимо $h_b = s \cdot \sin\beta$ и $b = 2s \cdot \cos\beta$. Ако је Е средина ивице BC из правоуглог троугла VOE налазимо да је $H = \sqrt{h_b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Решење: $P = ab + ah_a + bh_b$; $V = \frac{1}{3}abH$.
2. Нека је то тетраедар $ABCD$, где је ABC основа. Нека је О центар описаног круга основе. Центар описаног круга поклапа се са тежиштем код једнакостраничног троугла, а и подножје је висине из темена D на основу. Ако је ивица основице a онда је њена висина дужине $h_0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Растојање од тачке О до неког од темена је $\frac{2}{3}h_0 = r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Одавде је $a = r\sqrt{3}$. Из правоуглог троугла AOD је $H^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}h_0\right)^2$, односно $H = r\sqrt{2}$. Решење: $P = 3\sqrt{3}r^2$, $V = \frac{r^3\sqrt{6}}{4}$.
3. Основе су слични троуглови, па се на основу коефицијента сличности налази $27k + 29k + 52k = 72$. Налазимо $k = \frac{2}{3}$. По Хероновом обрасцу површина троугла је $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где је $p = \frac{a+b+c}{2}$, налазимо површину основе $B = 270$.Однос површина сличних троуглова је $B_1 : B = k^2$. Дакле, $B_1 = 120$. Решење: $V = 1900$.
4. Нека је $ABCD$ доња, а $A_1B_1C_1D_1$ горња основа зарубљене пирамиде. Уочимо трапез чија је доња основица ивица AB, а горња основица ивица C_1D_1. Четвороугао ABC_1D_1 је једнакокраки трапез. Продужимо ивицу AB преко B за дужину 10, тако добијемо тачку Е. Троугао AEC_1 је једнакокрак, краци су му управо једнаки датој дијагонали. Висина тог троугла је

$h_d=\sqrt{18^2-\left(\frac{14+10}{2}\right)^2}=6\sqrt{5}.$ Сада налазимо дијагоналу бочне стране $d_1=\sqrt{{h_d}^2+(14-12)^2}=2\sqrt{46}.$ Сада потпуно аналогно налазимо висину бочне стране $h=\sqrt{{d_1}^2-12^2}=2\sqrt{10},$ па бочну ивицу $s=\sqrt{h^2+2^2}=2\sqrt{11}.$

За одређивање висине зарубљене пирамиде уочимо унутар веће основе нормалну пројекцију мање. Сада лако налазимо из троугла $AA_1'A_1$ да је $H=\sqrt{s^2-\left(a\sqrt{2}-a_1\sqrt{2}\right)^2}=6.$ итд. Решење: $V=872;\quad P=296+96\sqrt{11}.$

5. Нека је O центар основе, а V врх купе. Нека је S центар уписане лопте. Нека је даље, AB пречник основе и тачка Т додир лопте и купе дуж изводнице $VB.$ Висину купе налазимо по Питагориној теореми: $H=\sqrt{15^2-9^2}=12.$ Троуглови VST и VBO су слични. Сада је: $VS=H-R=12-R;\quad OB=BT=9;$ Из сличности налазимо $VS:ST=VB:BO\Leftrightarrow(12-R):R=15:9\Leftrightarrow R=\frac{9}{2}.$ Решење: $P=36\pi;\quad V=\frac{243}{2}\pi.$

6. Полупречник великог круга те сфере је полупречник уписаног круга основе описане призме. Висина призме је пречник сфере. Ако је полупречник сфере R и a дужина основне ивице имамо $H=2R,\quad R=\frac{1}{3}h_0\Leftrightarrow a=2\sqrt{3}R.$ Центар описане сфере око призме је на оси која спаја центре описаних кругова основа. Ако ту тачку означимо са S, тачка O је центар описаног круга основе и A је једно теме, онда полупречник описане сфере налазимо из правоуглог троугла $SOA.$ Имамо да је $SO=H-R_x;\quad SA=R_x$ и $OA=\frac{2}{3}h_0=2R.$ Из $(2R-R_x)^2+(2R)^2={R_x}^2.$ налазимо $R_x=2R.$ Решење: $\frac{P_1}{P_2}=\frac{4R^2\pi}{4(2R)^2\pi}=\frac{1}{4};\quad V_1:V_2=\frac{4}{3}R^3\pi:\frac{4}{3}(2R)^3\pi=1:8.$

7. Полупречник сфере је половина велике дијагонале. По Питагориној теореми налазимо $D=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}.$ Полупречник описане сфере је $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$ Решење: $P=3a^2\pi;\quad V=\frac{a^3\sqrt{3}\pi}{2}.$

8. Центар те лопте налази се на висини пирамиде спуштеној из врха на основу. Ако је то тачка К, а подножје тачка М тада се из правоуглог троугла АМК може израчунати тражени полупречник. Имамо да је $MK=H-R;\quad AM=\frac{2}{3}h_0=\frac{a\sqrt{3}}{3};$ Висину пирамиде налазимо из правоуглог троугла чије су странице апотема бочне стране и висина пирамиде. Односно $H=h_0\sin\beta=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\beta.$ Сада имамо да је $R^2=(H-R)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.$ итд. Решење: $R=a\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\sin\beta+\frac{1}{9\sin\beta}\right).$

9. Нека је a ивица правилног тетраедра. Полупречници уписаног и описаног круга око основе су редом: $r=\frac{1}{3}h_0=\frac{a\sqrt{3}}{6};\quad R=\frac{2}{3}h_0=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$ Висина се налази по Питагориној теореми $H=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}h_0\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$ Налазимо $P_u=\frac{a^2\pi}{12}\left(1+2\sqrt{3}\right);$

$P_o = \frac{a^2\pi(1+\sqrt{3})}{3}$. Даље је: $V_u = \frac{a^3\sqrt{6}\pi}{108}$; $V_o = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{27}$. Решење: $P_u : P_o = (5-\sqrt{3}) : 32$; $V_u : V_o = 3:22.$

10. Нека раван δ паралелна основи сече купу на растојању x од врха. Полупречник пресечног круга нека је r_1, а изводница вршне купе s_1. Нека је r полупречник основе целе купе, а s њена изводница. Из сличности троуглова имамо да је: $\frac{r_1}{r} = \frac{x}{H}$ и $\frac{s_1}{s} = \frac{x}{H}$. Множењем ових једнакости добијамо $\frac{r_1 \cdot s_1}{r \cdot s} = \frac{x^2}{H^2}$. Површина омотача купе дата је са $M = rs\pi$, па по услову задатка је $rs = 2r_1 s_1$. Враћањем у добијену релацију налазимо $H^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}H.$

11. Како је изводница под углом од 45^0 следи да је $H = R - r.$ Дакле, $H = 10.$ Изводница је онда $s = H\sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$ Лако налазимо решење по формулама. Решење: $V = \frac{7000}{3}\pi$; $P = 100(5+3\sqrt{2})\pi.$

12. Нека је то троугао $ABC,$ (прав угао је код C). Подножје висине из C на хипотенузу нека је $D.$ По Питагориној теореми је хипотенуза $c = \sqrt{15^2+20^2} = 25.$ Из формула за површину правоуглог троугла налазимо висину. $\frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2} \Leftrightarrow h_c = 12.$ Из сличности троуглова $\Delta BCD \sim \Delta BAC$, следи да је $BC : BD = BA : BC,$ односно $BD = 9.$

Тело које ротира је зарубљена пирамида којој недостаје купа у средини. Висина обе наведене купе је хипотенузина висина. Полупречник веће основе је хипотенуза, а мање је једнак $BD.$ Површина добијеног тела је површина зарубљене купе без горње основе плус омотач мање купе. Запремина је разлика запремина те две купе. Решење: $V = 607\pi$; $P = 1270\pi.$

13. Како је основа правоугли троугао то је његова хипотенуза пречник основе ваљка. Ако са p и q означимо дужине на које хипотенузина висина дели хипотенузу по дефиницији тригонометријских функција налазимо $p = H \cdot tg\beta$ и $q = H \cdot ctg\beta.$ сада је $2r = c = H(tg\beta + ctg\beta).$ Лако се добија површина и запремина. Решење: $V = \frac{1}{2}H^3\pi(tg\beta+ctg\beta)^2$; $P = H^2\pi(tg\beta+ctg\beta)(tg\beta+ctg\beta+1).$

14. Полупречник основе ваљка је $r = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2} = \frac{5}{2}.$ Решење: $P = \frac{75}{2}\pi$; $V = \frac{125}{4}\pi.$

15. Центар траженог круга налази се на нормали на раван троугла у центру уписаног круга. Полупречник уписаног круга налазимо из формуле за површину троугла $\frac{a+b+c}{2} \cdot r = P.$ Површину троугла налазимо из Хероновог обрасца $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ где је $p = \frac{a+b+c}{2} = 21,$ налазимо површину основе $P = 84.$ Решење: $d = \sqrt{5^2-4^2} = 3.$